

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 2

Artikel: Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie
Autor: Fejes Tóth, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20710>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.	Band XV	Nr. 2	Seiten 25–48	Basel, 10. März 1960
-----------	---------	-------	--------------	----------------------

Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie

Die Benennung «diskrete Geometrie» wird als Bezeichnung desjenigen Gebietes der Geometrie benutzt, dessen Gegenstand aus diskreten Elementen bestehende Mannigfaltigkeiten bilden. Dieses Gebiet umfasst unter anderem die Theorie der diskontinuierlichen Bewegungsgruppen, der regelmässigen Raumzerlegungen und der Punktgitter und weist daher enge Beziehungen mit der Gruppentheorie, Zahlentheorie, Algebra, Funktionentheorie und anderen Gebieten der Mathematik auf. In neuerer Zeit treten aber in der diskreten Geometrie verschiedene Lagerungs-, Überdeckungs- und andere Extremalprobleme in Vordergrund, die oft von der Industrie oder von den Naturwissenschaften gestellt werden.

Eine zusammenfassende Darstellung dieses verhältnismässig neueren Problemkreises findet sich in meinem Buch *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* [17]. In diesem Aufsatz¹⁾ möchte ich über einige neuere einschlägige Ergebnisse berichten.

Ich beginne mit einigen Lagerungsproblemen in der euklidischen Ebene.

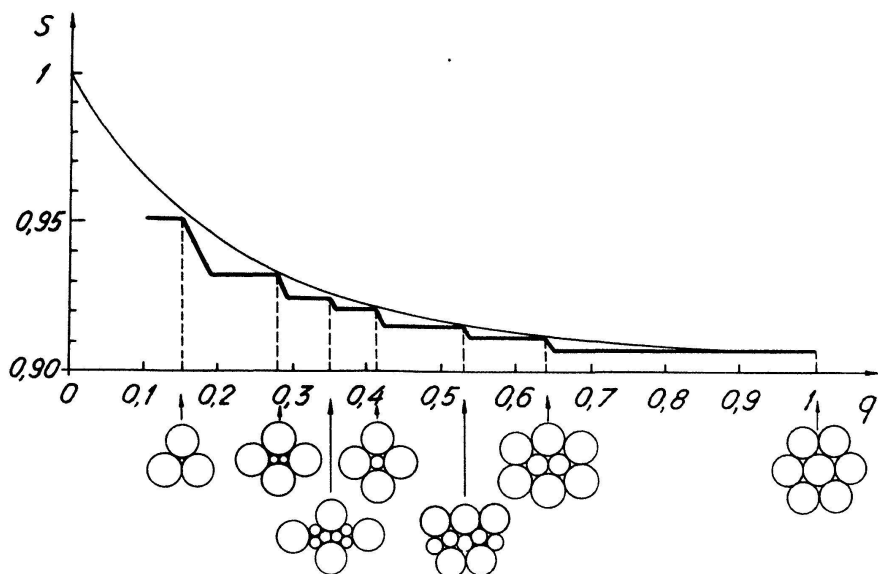
In einem mit MOLNÁR gemeinsam geschriebenen Aufsatz haben wir die Überdeckung und Unterdeckung durch inkongruente Kreise untersucht. Stellen wir uns vor, dass wir über einen unerschöpflichen Vorrat von Kreisen verfügen, deren Halbmesser in einem fest vorgegebenen Intervall (r, R) liegen. Wie müssen die Kreise gewählt und angeordnet werden, um die Ebene möglichst dicht unterzudecken (das heisst auszufüllen) bzw. möglichst dünn überzudecken?

Wir haben für die Unterdeckungsdichte eine obere und für die Überdeckungsdichte eine untere Schranke $s(q)$ bzw. $S(q)$ ($q = r/R$) angegeben. Wir betrachten drei Kreise und variieren sie unter den Bedingungen, dass ihre Radien im Intervall (r, R) bleiben, dass sie nicht übereinandergreifen, dass wenigstens ein Kreis die beiden anderen berührt und dass endlich kein Kreis die gegenüberliegende Seite des durch die Kreismittelpunkte bestimmten Dreiecks Δ trifft. Dann ist $s(q)$ die grösstmögliche Kreisdichte in Δ . In analoger Weise ist $S(q)$ die kleinstmögliche Dichte von drei Kreisen bezüglich Δ , deren Halbmesser $\geq r$ und $\leq R$ ausfallen und die einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt aufweisen.

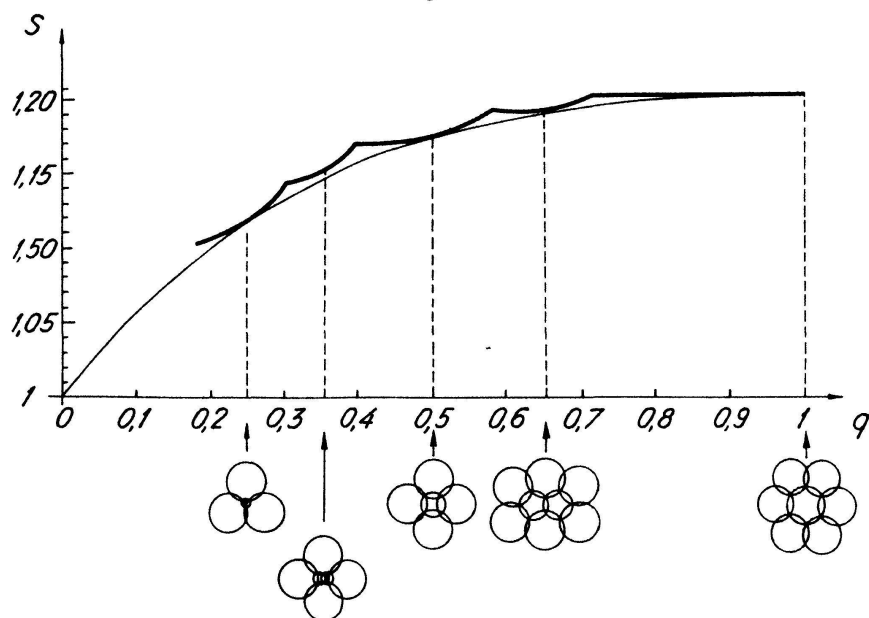
¹⁾ Diesem Aufsatz liegt ein Vortrag zugrunde, den der Verfasser am 9. Oktober 1959 an der Geometrie-Tagung in Oberwolfach gehalten hat.

Nach sorgfältigen numerischen Rechnungen scheint $s(q)$ mit folgender Grösse übereinzustimmen: die Dichte von drei einander gegenseitig berührenden Kreisen vom Halbmesser r, r, R in dem von den Kreismittelpunkten bestimmten Dreieck. Der exakte Beweis ist mit erheblichen rechentechnischen Schwierigkeiten verbunden, die aber FLORIAN [4] grösstenteils schon beseitigt hat.

Die Schranke $S(q)$ lässt sich praktisch mit folgender Grösse identifizieren: Man betrachte drei Kreise vom Radius r, R, R in einer symmetrischen Lage, die einander in einem Punkt schneiden. Diese Kreisanordnung hat noch einen Freiheitsgrad. Man nehme das Minimum der Dichte dieser Kreise im Dreieck ihrer Mittelpunkte.



Figur 1



Figur 2

Schranken von entgegengesetzter Richtung hat, durch Konstruktion günstiger Kreisanordnungen, MOLNÁR angegeben. Die oberen und unteren Schranken liegen, besonders für gewisse Werte von $q = r/R$, sehr nahe beieinander und stimmen sogar bei der Überdeckung für $q = 0,5$ und $q = 0,25$ praktisch überein, womit gemeint wird, dass ihre Differenz $< 10^{-5}$ ausfällt (Figuren 1 und 2).

Eine Anordnung von kongruenten Kreisen, wobei jeder Punkt der Ebene zu höchstens bzw. wenigstens k Kreisen gehört, wird eine k -fache Kreisunterdeckung bzw. eine k -fache Kreisüberdeckung genannt. Dabei sind die Kreise im ersten Fall als offene, im zweiten als abgeschlossene Scheiben zu betrachten. Gesucht wird die maximale Dichte d_k einer k -fachen Kreisunterdeckung, sowie die minimale Dichte D_k einer k -fachen Kreisüberdeckung. Diese Probleme scheinen schon für $k = 2$ äusserst schwierig zu sein. Jedoch gelang es HEPPEs [1] bzw. DANZER an je einem geistreichen Beispiel zu zeigen, dass $d_2 > 2 d_1$ und $D_2 < 2 D_1$ ausfällt. Für gitterförmige Kreisarrangements wurden diese Probleme von PRACHAR, FEW, BLUNDON und HEPPEs [2] in Angriff genommen, aber abschliessende Ergebnisse sind auch in dieser Richtung nicht zu erwarten.

Wir wollen in einem vorgegebenen abgeschlossenen Gebiet vom Flächeninhalt F n Punkte so verteilen, dass die Länge des sie verbindenden kürzesten Streckenzuges den grösstmöglichen Wert L_n erreicht. Ich habe vor 20 Jahren die Vermutung ausgesprochen [1], dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^2}{n} = \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

ausfällt, was bedeuten würde, dass bei einer grossen Punktzahl die Punkte ein gleichseitiges Dreiecksgitter bilden müssen.

Für ein Einheitsquadrat hat FEW – als Verschärfung einer Ungleichung von VERBLUNSKY – die Abschätzung $L_n < \sqrt{2n} + \frac{7}{4}$ angegeben. Wir haben mit ERDÖs in einem gemeinsamen Aufsatz versucht, die obige, noch immer unbewiesene Vermutung von einer anderen Richtung anzugreifen. Verbinden wir jeden Punkt mit dem nächsten, bilden die totale Länge der entstehenden n Strecken (von denen gewisse zusammenfallen können) und betrachten wir das Maximum S_n dieser totalen Länge, wenn die Punkte im Gebiet frei variieren. Wir haben gezeigt, dass

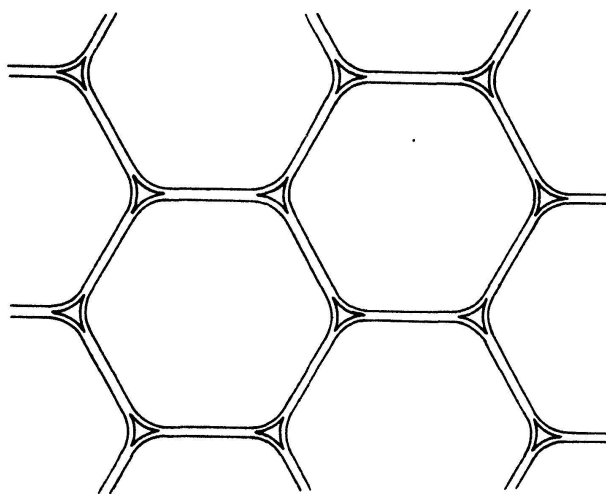
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^2}{n} = \frac{2F}{\sqrt{3}}.$$

Die folgenden Probleme entsprangen aus der Betrachtung einer Figur des berühmten Buches von THOMPSON, die einen Schnitt des parenchymatischen Gewebes des Maisstengels darstellt (Figur 3). Hier füllen die Zellen nicht den ganzen zur Verfügung stehenden Raum aus, und es entsteht die Frage, welche Gestalt und Anordnung die Zellen unter der Wirkung des gegenseitigen Druckes und der Elastizität der Zellwände annehmen. Da die Zellen in der Achsenrichtung stark verlängert sind, reduziert sich die ganze Fragestellung auf ein ebenes Problem.

Es sei in ein vorgegebenes Gebiet eine grosse, aber fest vorgegebene Anzahl von konvexen Scheiben eingelagert. Es lässt sich dann fragen: 1. Bei welcher Gestalt und Anordnung wird der Gesamthalt der Scheiben maximal, wenn die Scheiben einen gleichen, vorgegebenen Umfang haben? 2. Bei welcher Gestalt und Anordnung wird der Gesamtumfang der Scheiben minimal, wenn die Scheiben einen gleichen, vorgegebenen Inhalt haben?

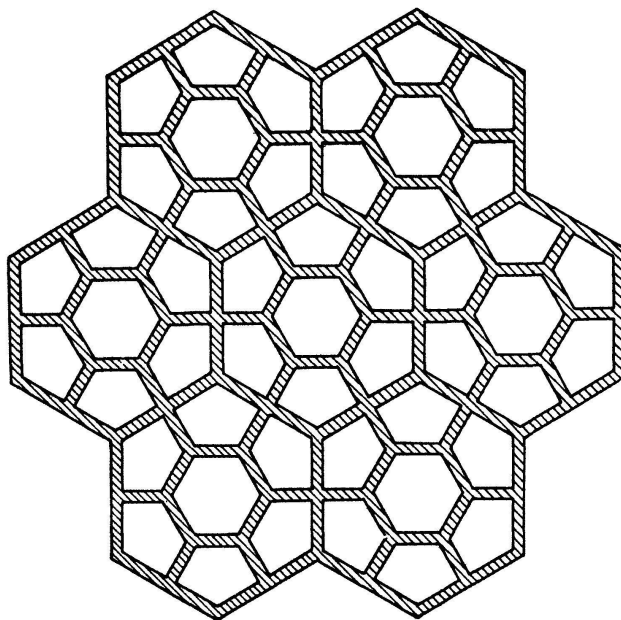
Diese Probleme, die als die isoperimetrischen Grundprobleme für 2-dimensionale Zellenaggregate angesehen werden können, wurden von mir [2], bzw. von HEPPEs und mir gelöst. Die Extremalfigur entsteht in beiden Fällen, wenn man die Ecken

eines hexagonalen Mosaiks $\{6,3\}$ durch kongruente Kreisbögen abrundet. Bemerkenswert ist dabei, dass die Kongruenz der Scheiben, sowie ihre reguläre Gestalt und Anordnung automatische Folgerungen einer einzigen Extremalbedingung sind.



Figur 3

Wenn wir etwa sagen, dass die Bienen ihre Waben unter gewissen Bedingungen am wirtschaftlichsten bauen, so denken wir stillschweigend immer an Waben von sehr dünner Wanddicke. Ich habe es versucht, in einem derartigen Problem auch die Wanddicke in Betracht zu ziehen [3]. Wir wollen ein zusammenhängendes Gebiet, das durch wenigstens zwei geschlossene Kurven begrenzt ist, ein Wandsystem nennen (Figur 4). Der kleinste Abstand zwischen zwei begrenzenden Kurven sei Wanddicke



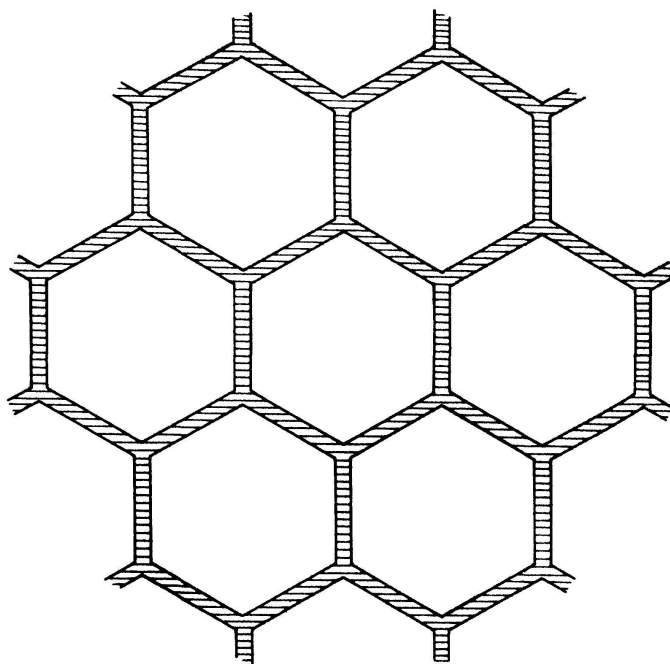
Figur 4

genannt. Wir wollen in ein gegebenes Gebiet ein Wandsystem von vorgegebener Dicke so einbauen, dass es eine möglichst grosse Zahl von konvexen Zellen von vorgegebenem Inhalt enthält. Ich habe gezeigt, dass für grosse Gebiete die Lösung durch das reguläre hexagonale Wandsystem (Figur 5) geliefert wird. Dies folgt aus folgendem Satz: Liegt

in einem konvexen Sechseck vom Inhalt H ein Wandsystem von der Dicke $2d$, das n konvexe Zellen vom Inhalt $\geq h$ enthält, so gilt

$$n \leq \left(\frac{\sqrt{H} - \sqrt[3]{12} d}{\sqrt{h} + \sqrt[3]{12} d} \right)^2.$$

LENZ [1, 2] hat wertvolle Teilergebnisse im folgenden schwierigen Problem erzielt: Es sei eine abgeschlossene ebene Punktmenge M und eine natürliche Zahl k vorgegeben. Gesucht wird die kleinste Zahl $d = d_k(M)$ von der Eigenschaft, dass sich M durch k Punktmengen vom Durchmesser $\leq d$ überdecken lässt.



Figur 5

Ausser kleinen Werten von k betrachtet LENZ auch das asymptotische Verhalten von $d_k(M)$ für grosse Werte von k . Das Beispiel des Sechseckmosaiks zeigt, dass für eine Punktmenge M vom Jordanschen Mass $|M|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} d_k(M) \leq \sqrt{\frac{8|M|}{\sqrt{27}}} < 1,241 \sqrt{|M|}$$

ausfällt. Andererseits gilt nach LENZ:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} d_k(M) > 1,19 \sqrt{|M|}.$$

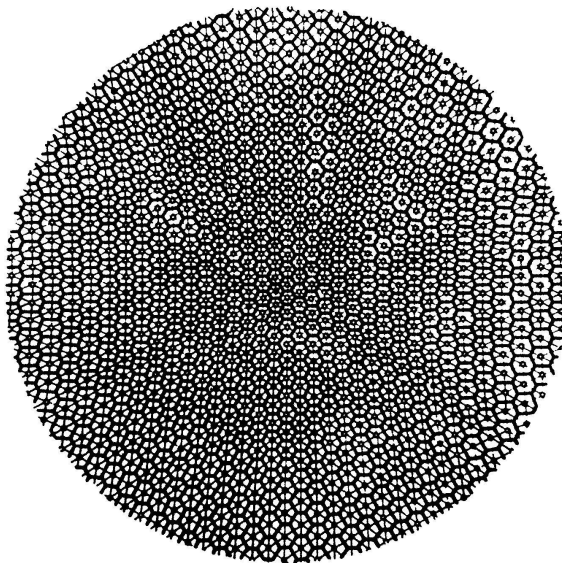
Lassen wir jetzt einige Zeilen von einem Aufsatz von STEINHAUS folgen: Diverses questions, par exemple celles des types en anthropologie, ou bien d'autres, d'ordre pratique, comme celles de la normalisation des objets industriels, exigent pour leur solution la détermination de n représentants fictifs d'une nombreuse population, choisis de manière à réduire autant que possible les écarts entre les éléments de la population et ceux de l'échantillons, l'écart étant mesuré entre tout élément réel et l'élément fictif qui lui est le plus proche.

Diese Erwägungen führten STEINHAUS zu folgendem Problem: Zu einem vorgegebenen (nicht notwendig homogenen) Körper n Punkte P_1, \dots, P_n so anzugeben, dass die Summe $T_1 + \dots + T_n$ den kleinstmöglichen Wert erreicht, wobei T_i das auf P_i bezogene Trägheitsmoment desjenigen Teilkörpers bedeutet, dessen Punkte einen kleineren Abstand von P_i als von einem anderen Punkt P_j haben.

Ich habe das asymptotische Verhalten der Lösung für grosse Werte von n im 2-dimensionalen Fall untersucht [4]. Es stellte sich heraus, dass die Teilscheiben angenähert reguläre Sechsecke von gleichem Trägheitsmoment sein müssen. Dies kommt im folgenden Satz zum Ausdruck: Wir zerlegen eine konvexe Scheibe S von der Dichte $f(x, y)$ in n Teilscheiben S_1, \dots, S_n , bezeichnen das Trägheitsmoment von S_i in bezug auf seinen Schwerpunkt mit $T(S_i)$ und betrachten das Minimum M_n der Summe $T(S_1) + \dots + T(S_n)$, erstreckt über alle möglichen Zerlegungen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n M_n = \frac{5\sqrt{3}}{54} \left(\iint_S \sqrt{f(x, y)} \, dx \, dy \right)^2.$$

Mein Mitarbeiter MOLNÁR versuchte eine extremale Zerlegung in «angenähert» reguläre Sechsecke von verschiedener Grösse an einer Zeichnung zu veranschaulichen (Figur 6). Diese Figur entspricht dem Fall, wo die Dichte der Scheibe, und damit



Figur 6

die Anzahldichte der Sechsecke, radial abnimmt. Es stellte sich dabei heraus, dass es überhaupt nicht einfach ist, von den kleinen mittleren Sechsecken so durch einen stetigen Übergang zu den grösseren, peripheren zu gelangen, dass die Irregularität der Sechsecke wenigstens nicht ins Auge fallen soll. Es ist daher vorstellbar, dass sich dieser Übergang in kleinen Sprüngen, durch Brechungslinien vollzieht, so dass innerhalb der kleinen, von den Brechungslinien begrenzten Teilen noch eine grosse Anzahl von «fast» kongruenten Sechsecken liegt. Einstweilen verfügen wir aber über keine Methoden, die in die Feinstruktur der extremalen Zerlegung eine so tiefe Einsicht gewährleisten würde.

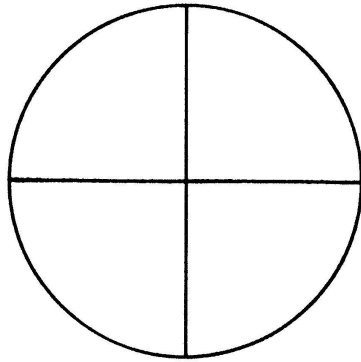
Die folgenden Resultate beziehen sich auf die Kugel. Wenden wir uns zunächst dem Problem der dichtesten sphärischen Kreisunterdeckung und der dünnsten sphärischen Kreisüberdeckung zu! Wir wollen also die Kugel mit einer vorgegebenen

Anzahl n von möglichst großen kongruenten Kreisen unterdecken bzw. mit n möglichst kleinen kongruenten Kreisen überdecken. Diese Probleme scheinen von biologischem Interesse zu sein. Der holländische Biologe TAMMES versuchte nämlich, die eigenartige Verteilung der Austrittsstellen an den Pollenkörnern gewisser Blumen durch die Voraussetzung zu erklären, dass die Austrittsstellen die Mittelpunktverteilung einer dichtesten Kreisunterdeckung zu realisieren trachten. Andererseits kann man aber auch von der Hypothese ausgehen, dass die Verteilung der Austrittsstellen durch das Prinzip der dünnsten Kreisüberdeckung bedingt wird. Es ist nämlich anzunehmen, dass, nachdem der Pollen an der Narbe anhaftet, die Befruchtung nur dann zustande kommt, wenn der Abstand zwischen dem Haftungs- und der nächsten Austrittsstelle nicht eine gewisse Grösse r überschreitet. Schlägt man um die Austrittsstellen mit dem Radius r Kreise, so ist die Wahrscheinlichkeit der Befruchtung mit dem Inhalt des überdeckten Teiles proportional. Bei welcher Verteilung erreicht dieser Inhalt den grösstmöglichen Wert? Dieses Problem ist nur für in einem gewissen Intervall liegende Werte von r interessant und geht in den beiden extremen Fällen in das Problem der dichtesten Kreisunterdeckung und der dünnsten Kreisüberdeckung über.

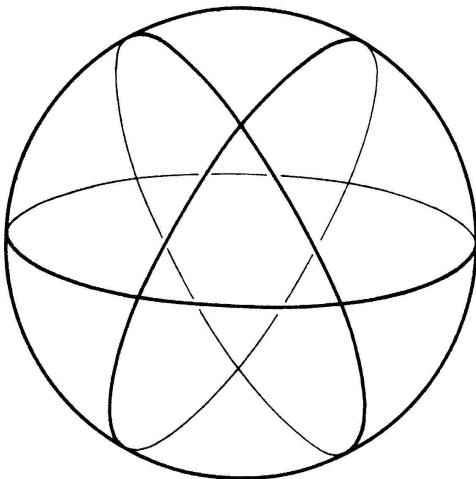
In dem erwähnten Buch habe ich eine Abschätzung angegeben, aus der die Lösung dieses allgemeinen Problems für die Punktzahl $n = 3, 4, 6$ und 12 folgt: die extremale Punktverteilung ist durch die Ecken eines regelmässigen Dreiecks, Tetraeders, Oktaeders und Ikosaeders gegeben. Das Problem der dichtesten Kreisunterdeckung wurde für $n = 5$ schon durch TAMMES und für $n = 7, 8$ und 9 durch SCHÜTTE und VAN DER WAERDEN (1951) gelöst. Ein neueres Ergebnis in dieser Richtung hat DANZER erreicht, der die Lösung für $n = 11$ fand: die extremale Verteilung von 11 Punkten entsteht, wenn von den 12 Ecken eines Ikosaeders eine herausgehoben wird. Es wäre schön, durch Erledigung des Falles $n = 10$ die Lösungen für $n \leq 12$ zu vervollständigen.

In den irregulären Fällen wurde das Problem der dünnsten sphärischen Kreisüberdeckung von SCHÜTTE in Angriff genommen und für $n = 5$ und 7 gelöst. Es stellte sich heraus, dass die beste Punktverteilung in diesen Fällen (ebenso wie im Fall $n = 6$) durch die Ecken einer Doppelpyramide dargestellt wird. Es ist dabei bemerkenswert, dass die Lösungen der beiden betrachteten Probleme für $n = 7$ grundverschieden sind. Welche Verteilung wird durch die Natur realisiert? Es wäre interessant, diese Frage durch eine grosse Anzahl von sorgfältigen Beobachtungen und Messungen zu entscheiden.

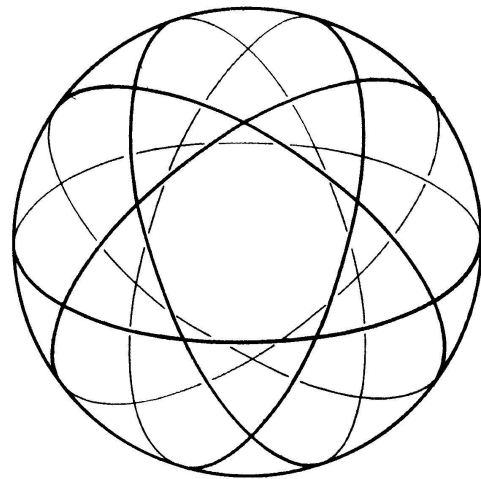
Neulich habe ich das Problem untersucht [5], wie man auf der Kugel n Punkte verteilen muss, dass die gegenseitige sphärische Abstandssumme der Punkte möglichst gross ausfällt. Ich habe die Lösungen für $n \leq 6$ angegeben und für beliebige Werte von n Abschätzungen und Vermutungen aufgestellt. Kürzlich hat SPERLING (Student in Frankfurt am Main) meine Vermutung bestätigt, dass für gerades n die beste Verteilung von zentralsymmetrischen und nur solchen Punktsystemen geliefert wird. Für ungerade Werte von $n > 6$ ist die Lösung noch nicht bekannt. Vermutlich besteht hier das extremale Punktsystem aus einem, eventuell leeren, zentralsymmetrischen Teilsystem, während die übrigen Punkte so auf einem Grosskreis verteilt sind, dass die von einem Punkt bestimmten beiden offenen Halbkreise eine gleiche Anzahl von Punkten enthalten.



Figur 7a

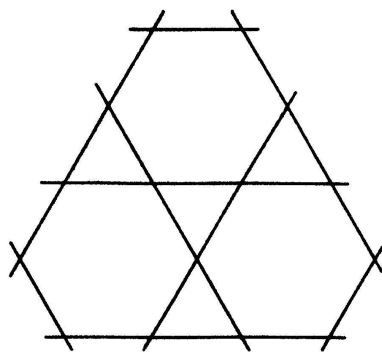


Figur 7b



Figur 7c

Legen wir auf die Kugel $n > 2$ Grosskreise! Es entsteht ein Netz. Gesucht wird diejenige Verteilung der Grosskreise, bei der dieses Netz möglichst fein ausfällt, in dem Sinne, dass seine grösste Kante maximal wird. Da ein jeder Grosskreis von den übrigen in höchstens $2(n-1)$ Teilbögen zerlegt wird, gibt es auf jedem Grosskreis einen Teilbogen von der Länge $\geq 2\pi/(2n-2)$. Folglich ist die Länge der grössten Kante $l \geq \pi/(n-1)$. Ich habe bemerkt [6], dass in dieser Ungleichung Gleichheit für und nur für das sphärische Netz der sogenannten quasiregulären Körper gilt. Diese Körper sind durch die Kantenmittelpunkte der platonischen Körper bestimmt. Ihre Netze bestehen aus $n = 3, 4$ bzw. 6 Grosskreisen (Figur 7).



Figur 8

Wie gross ist der Wert von $\lim_{n \rightarrow \infty} n l$ und wie lässt sich das asymptotische Verhalten des extremalen Netzes für grosse Werte von n kennzeichnen? Weiterhin kann statt

der Kugel die Euklidische Ebene in Betracht gezogen werden, wobei die Anzahl der Grosskreise durch die Geradendichte zu ersetzen ist. Bestimmt dann das extremale Geradennetz ein halbreuläres euklidisches Mosaik (Figur 8), das die Natur im Kiesel-skelett der *Arcella vulgaris* in so erstaunlicher Vollkommenheit realisiert? All diese Fragen scheinen recht schwierig zu sein.

Mit sphärischen Lagerungsproblemen hängen verschiedene Polyeder betreffende Extremalprobleme zusammen. Ich habe gezeigt, dass das Volumen V eines konvexen Polyeders vom Inkugelradius r der Ungleichung

$$V \geq \frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1 \right) r^3$$

Genüge leistet, wo e , f und k die Ecken-, Flächen- und Kantenzahl bedeuten. Gleichheit gilt nur im Fall der platonischen Körper. Nun hat FLORIAN [1] die analoge, aber viel schwerere Ungleichung

$$V \leq \frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k} \right) R^3$$

bewiesen, wobei R den Umkugelradius bedeutet und in der Gleichheit ebenfalls nur für die regulären Polyeder in Kraft tritt.

Aus den beiden Ungleichungen folgt die weitere nette Ungleichung

$$\frac{R}{r} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{\pi}{q},$$

wo $p = 2k/f$ und $q = 2k/e$ die mittlere Kantenzahl der Flächen und Ecken bedeutet.

Die erwähnte Volumenabschätzung nach unten folgt aus einer allgemeineren Ungleichung, die es gestattet, eine analoge Abschätzungsformel auch im elliptischen und hyperbolischen Raum aufzustellen. Diese Ungleichung (FEJES TÓTH [7]) lautet folgendermassen:

$$V \geq \frac{2k}{\sqrt{\kappa}^3} \int_0^{\pi/2k} \left\{ \sqrt{\kappa} r - \frac{\cos x}{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 x}} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \sqrt{\kappa} r \frac{\sqrt{\omega^2 - \sin^2 x}}{\cos x} \right) \right\} dx,$$

wo

$$\omega = \sin \frac{\pi f}{2k} / \cos \frac{\pi e}{2k}$$

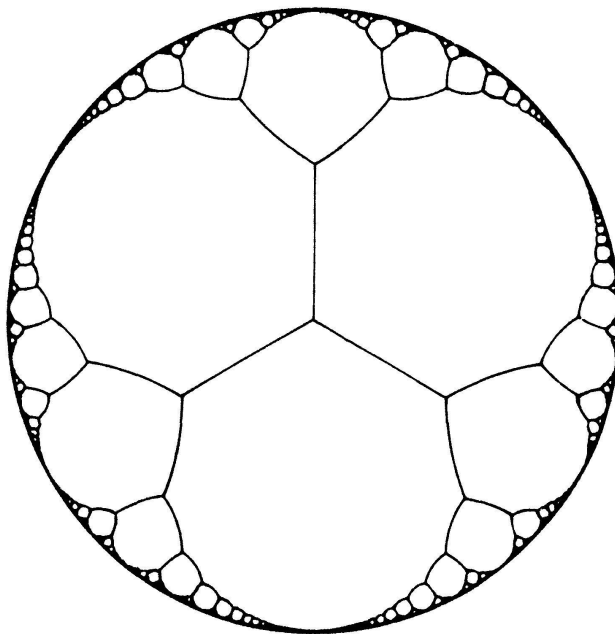
ist und κ die Raumkrümmung bedeutet.

Hier sei noch auf einige von FLORIAN [2, 3] bzw. mir [8, 9] herrührende analoge Ungleichungen für Flächeninhalt und Kantenkrümmung, auf verschiedene Verallgemeinerungen auf Sternpolyeder, sowie auf einige Extremaleigenschaften der regulären Polytope hingewiesen. Diese Untersuchungen können aber noch nicht als abgeschlossen angesehen werden.

Wir schliessen unseren Bericht über Polyeder mit einem schönen Satz von BESICOVITSCH und EGGLESTON, nach dem unter sämtlichen konvexen Polyedern, die eine feste Kugel enthalten, der umbeschriebene Würfel die kleinstmögliche Kantenlängensumme aufweist. Dies wurde vorher von mir als Vermutung ausgesprochen. Ein interessantes, bisher noch ungelöstes Problem entsteht, wenn man sich auf Dreieckspolyeder beschränkt. Dann wird nämlich die kleinstmögliche Kantenlängensumme

vermutlich von zwei regulären Körpern, und zwar vom Tetraeder und Oktaeder, erreicht.

Mehrere neuere Abhandlungen sind dem Problem der dichtesten Kugelunterdeckung und dünnsten Kugelüberdeckung gewidmet (BAMBAH [1, 2, 3], BAMBAH und DAVENPORT, CHABAUTY [1, 2], COXETER, DAVENPORT [1, 2], ERDÖS und ROGERS, FEJES TÓTH [14, 15], RANKIN, ROGERS, WATSON). Wir legen unseren Betrachtungen einen n -dimensionalen Raum konstanter Krümmung zugrunde und schlagen um die Ecken eines regulären Simplexes von der Kantenlänge $2r$ bzw. vom Umkugelradius r Kugeln vom Radius r . Bezeichnen wir die Dichte der Kugeln im Simplex mit $d(r)$ bzw. $D(r)$, so liegt die Vermutung nahe, dass $d(r)$ eine obere Schranke sämtlicher Kugelunterdeckungen und $D(r)$ eine untere Schranke sämtlicher Kugelüberdeckungen von Kugeln vom Radius r darstellt. Diese Vermutung habe ich im 2-dimensionalen Fall bewiesen [10, 11] (und im allgemeinen Fall durch einen Beweisansatz unterstützt [14]). Hieraus folgt, dass die Flächeninkreise und Flächenumkreise der regulären Dreikantmosaike je eine dichteste Kreisunterdeckung bzw. dünnste Kreisüberdeckung bilden. Es lässt sich ferner zeigen, dass in der hyperbolischen Ebene $d(r)$ und $D(r)$ monoton zu- bzw. abnehmen und für $r \rightarrow \infty$ den Grenzwerten $3/\pi$ bzw. $\sqrt{12}/\pi$ zustreben. Folglich ist in der hyperbolischen Ebene die Kreisunterdeckungsichte stets $\leq 3/\pi$ und die Kreisüberdeckungsichte $\geq \sqrt{12}/\pi$. Es lässt sich zeigen (FEJES TÓTH [12, 13]), dass Gleichheit nur für gewisse Horozyklenanordnungen, nämlich für die Flächenkreise und Flächenumkreise des Mosaiks $\{\infty, 3\}$, erreicht wird (Figur 9).



Figur 9

Auf die Bedeutung der obigen Vermutung im 3-dimensionalen sphärischen und besonders im hyperbolischen Raum haben unabhängig von einander COXETER und ich [15] nachdrücklich hingewiesen. Es scheint, dass im hyperbolischen Raum die Kugelunterdeckungsichte stets

$$\leq \left(1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \cdots\right)^{-1} = 0,853 \dots$$

und die Kugelüberdeckungsdichte

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \cdots\right)^{-1} = 1,280 \dots$$

ausfällt und Gleichheit nur für gewisse Horosphärenanordnungen, und zwar für die Zelleninkugeln bzw. Zellenumkugeln des Mosaiks $\{6, 3, 3\}$ in Kraft tritt. Das Verhältnis dieser Konstanten beträgt 2:3.

Für Kugelunterdeckungen im n -dimensionalen Euklidischen Raum hat die Richtigkeit der obigen Vermutung ROGERS dargetan. Dieses Ergebnis, von dem ich erst kürzlich Kenntnis bekam, hat mich besonders fasziniert. Es kann zweifelsohne als einer der wichtigsten neueren Beiträge der diskreten Geometrie angesehen werden. Für den gewöhnlichen Raum ergibt sich hieraus für die Kugelunterdeckungsdichte die heute bekannte beste obere Schranke, nämlich

$$\sqrt[3]{18} \left(\arccos \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 0,779 \dots$$

Zum Schluss noch ein Kugeltarnungsproblem. HORNICH hat die Frage aufgeworfen, durch wieviele materielle Einheitskugeln sich eine materielle Einheitskugel radial verdecken lässt, in dem Sinne, dass jede vom Mittelpunkt der zu verdeckenden Kugel ausstrahlende Halbgerade eine Deckkugel treffen soll. Trotz des völlig elementaren Charakters dieses Problems scheint die Lösung fast unüberwindlichen Schwierigkeiten zu begegnen. Von den verschiedenen Untersuchungen, die aus diesem Problem entsprangen (vgl. FEJES TÓTH [16]) sei folgendes, von mir angeregtes Resultat von GRÜNBAUM hervorgehoben: Die Mindestzahl der Einheitskugeln, durch die sich ein Leuchtpunkt verdecken lässt, beträgt sechs. L. FEJES TÓTH, Budapest

LITERATURVERZEICHNIS

- BAMBAH, R. P.: [1] *On Lattice Coverings*, Arch. Math. 19, 447–459 (1953). – [2] *On Lattice Covering by Spheres*, Proc. Nat. Inst. Sci. India 20, 25–52 (1954). – [3] *Lattice Coverings with Four-dimensional Spheres*, Proc. Cambridge phil. Soc. 50, 203–208 (1954).
- BAMBAH, R. P., und H. DAVENPORT: *The Covering of n -dimensional Space by Spheres*, J. London math. Soc. 27, 224–229 (1952).
- BESICOVITSCH, A. S., und H. G. EGGLESTON: *The Total Length of the Edges of a Polyhedron*, Quart. J. Math. 8, 172–190 (1957).
- BLUNDON, W. J.: *Multiple Covering of the Plane by Circles*, Mathematika 4, 7–16 (1957).
- CHABAUTY, C.: [1] *Empilement des sphères égales dans R_n et valeur asymptotique de la constante γ_n d'Hermite*, C. R. Acad. Sci. Paris 235, 529–532 (1952). – [2] *Résultats sur l'empilement de calottes égales sur une périsphère de R_n et correction à un travail antérieur*, C. R. Acad. Sci. Paris 236, 1462–1464 (1953).
- COXETER, H. S. M.: *Arrangements of Equal Spheres in non-Euclidean Spaces*, Acta Math. Sci. Hungaricae 5, 263–274 (1954).
- DANZER, L.: *Verteilung von elf Punkten auf der Kugel*, vorgetragen an der Geometrie-Tagung in Oberwolfach am 25. Oktober 1958.
- DAVENPORT, H.: [1] *The Covering of Space by Spheres*, R. Circ. math. Palermo 1 (2), 92–107 (1952). – [2] *Le recouvrement de l'espace par des sphères*, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles 1955 (Liège et Paris 1956).
- ERDŐS, P., und L. FEJES TÓTH: *Pontok elhelyezése egy tartományban*, Magyar Tud. Akad. Mat. és Fiz. Oszt. Közl. 6, 185–190 (1956).
- ERDŐS, P., und C. A. ROGERS: *The Covering of n -dimensional Space by Spheres*, J. London math. Soc. 28, 287–293 (1953).

- FEJES TÓTH, L.: [1] *Über einen geometrischen Satz*, Math. Z. 46, 83–85 (1940). – [2] *Filling of a Domain by Isoperimetric Discs*, Publ. Math. 5, 119–127 (1957). – [3] *An Arrangement of Two-dimensional Cells*, Ann. Math. Univ. Budapestensis (Sect. Math.) 2, 61–64 (1959). – [4] *Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d'éléments*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. (im Druck). – [5] *Über eine Punktverteilung auf der Kugel*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10, 13–19 (1959). – [6] *An Extremal Distribution of Great Circles on a Sphere*, Publ. Math. 6, 79–82 (1959). – [7] *On the Volume of a Polyhedron in non-Euclidean Spaces*, Publ. Math. 4, 256–261 (1956). – [8] *Characterisation of the Nine Regular Polyhedra by Extremum Properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 31–48 (1956). – [9] *Extremum Properties of the Regular Polytopes*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 6, 143–146 (1955). – [10] *Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4, 103–110 (1953). – [11] *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4, 111–114 (1953). – [12] *Über die dichteste Horozyklenlagerung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5, 41–44 (1954). – [13] *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 95–98 (1956). – [14] *Kugelunterdeckungen und Kugelüberdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, Arch. Math. 10, 307–313 (1959). – [15] *On Close-packings of Spheres in Spaces of Constant Curvature*, Publ. Math. 3, 158–167 (1953). – [16] *Verdeckung einer Kugel durch Kugeln*, Publ. Math. (im Druck). – [17] *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953).
- FEJES TÓTH, L., und A. HEPPES: *Filling of a Domain by Equiareal Discs*, Publ. Math. (im Druck).
- FEJES TÓTH, L., und J. MOLNÁR: *Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Math. Nachr. 18, 235–243 (1957).
- FEW, L.: *The Shortest Path and the Shortest Road through n Points*, Mathematika 2, 141–144 (1955).
- FLORIAN, A.: [1] *Eine Ungleichung über konvexe Polyeder*, Mh. Math. 60, 130–156 (1956). – [2] *Ungleichungen über konvexe Polyeder*, Mh. Math. 60, 288–297 (1956). – [3] *Ungleichungen über Sternpolyeder*, R.C. Sem. Mat. Univ. Padova 27, 18–26 (1957). – [4] *Kreislagerungen in der Ebene*, vorgetragen an der Geometrie-Tagung in Oberwolfach am 7. Oktober 1959.
- GRÜNBAUM, B.: *On a Problem of Fejes Tóth*, Amer. Math. Monthly (im Druck).
- HEPPES, A.: [1] *Über mehrfache Kreislagerungen*, El. Math. 10, 125–127 (1955). – [2] *Mehrfache gitterförmige Kreislagerungen in der Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10, 141–148 (1959).
- LENZ, H.: [1] *Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers*, Arch. Math. 7, 34–40 (1956). – [2] *Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser*, Jber. dtsh. Math.-Ver. 58, 87–97 (1956).
- MOLNÁR, J.: *Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Ann. Math. Univ. Budapestensis (Sect. Math.) 2, 33–40 (1959).
- RANKIN, R. A.: *The Closest Packing of Spherical Caps in n Dimensions*, Proc. Glasgow Math. Ass. 2, 139–144 (1955).
- ROGERS, C. A.: *The Packing of Equal Spheres*, Proc. London math. Soc. 8 (3), 609–620 (1958).
- SCHÜTTE, K.: *Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen*, Math. Ann. 129, 181–186 (1955).
- SPERLING, G.: *Lösung einer elementargeometrischen Frage von Fejes Tóth*, Arch. Math. (im Druck).
- STEINHAUS, H.: *Sur la division des corps matériels en parties*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 4 (1956); 801–804 (1957).
- TAMMES, P. M. L.: *On the Origin of Number and Arrangement of the Places of Exit on the Surface of Pollengrains*, Rec. Trav. bot. néerl. 27, 1–84 (1930).
- THOMPSON, D'ARCY, W.: *On Growth and Form*, Band II, 2. Aufl. (Cambridge 1952), S. 471, Figur 156.
- WATSON, G. L.: *The Covering of Space by Spheres*, R.C. Circ. math. Palermo 5 (2), 93–100 (1956).