Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 1

Rubrik: Literaturüberschau

schliesst. Die gebräuchliche Vorschrift für die Kreisberechnung war

$$\text{Fläche} = \frac{1}{12}\,(\text{Umfang})^2,$$

und der neue Text sagt, dass man ein genaueres Resultat erhalte, wenn man den obigen Wert noch mit 0; 57; 36 multipliziere. Die im Sexagesimalsystem geschriebene Zahl hat den Wert 0,96, woraus sich $\pi \approx 3{,}125$ ergibt! (Nach The Mathematical Teacher *1957*.)

2. «Ducere rectam lineam maximam aut minimam earum, quae transeunt per datum punctum, et jacent inter duas alias lineas sive rectas, sive curvas.» (NEWTON, *Opuscula* 1744, Band I, S. 87.)
▶ Es sei zum Beispiel $P(3;\,2)$ der gegebene Punkt, $y = 0$ und $y = x$ die gegebenen Geraden. Der eine Endpunkt der gesuchten Strecke UV sei $U(t;\,0)$. Man findet

$$t^4 - 5\,t^3 + 9\,t^2 - 13\,t = 0$$

mit der einzigen passenden Lösung $t = 3{,}48830$. Kinematische Überlegungen zeigen, dass für die minimale Strecke die Lote in U auf $y = 0$, in V auf $y = x$ und in P auf UV durch einen Punkt gehen.

3. Der englische Astronom NEVIL MASKELYNE (1732–1811) fand, dass für $|x| \ll 1$ gilt

$$\frac{\sin x}{x} \approx \sqrt[3]{\cos x}\,.$$

▶ Entwickle $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3\,x)/4$ in eine Potenzreihe.

4. «Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, von unveränderlichem Werthe.» (JAKOB STEINER, *Gesammelte Werke*, Band I, S. 267.)
▶ Das heisst: Zeichnet man über der Strecke BC zwei beliebige rechtwinklige Dreiecke BA_1C und BA_2C und wählt man auf BC einen beliebigen Punkt P, so ist

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BA_1P \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle CA_2P = \text{const.}$$

5. Um die Jahrhundertwende machte folgende Aufgabe die Runde: Eine Uhr hat Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger aus der Mitte. Es wird vorausgesetzt, dass alle drei Zeiger gleich lang sind und sich stetig bewegen. Um welche Zeit sind die Spitzen der Zeiger die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks?
▶ Nie! Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: die Reihenfolge Stunden-, Minuten-, Sekundenzeiger und Stunden-, Sekunden-, Minutenzeiger.

Literaturüberschau

V. VOLTERRA:

Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations

226 pages. Dover Publications, New York 1959

Publié tout d'abord en espagnol, puis en traduction anglaise en 1930, cet ouvrage est devenu un des classiques de l'analyse fonctionelle; cette nouvelle édition comporte une préface de EVANS et une remarquable biographie due à WHITTAKER, complétée d'une liste des publications de V. VOLTERRA. CH. BLANC

F. CECIONI: *Lezioni sui fondamenti della matematica*
1. Band: *Premesse e questioni generali*
VIII + 145 Seiten. Casa Editrice Dott. A. Milani, Padova 1958

Das Werk ist aus Vorlesungen des Autors hervorgegangen, die vor allem für zukünftige Mittelschullehrer bestimmt sind. Der vorliegende erste Band enthält die beiden Kapitel *Elementi di logica* und *Alcune considerazioni generali sulla organizzazione logica di una scienza. I postulati dell'aritmetica.* Der Stoff wird sehr ausführlich und eingehend behandelt, wobei aber immerhin im ersten Kapitel bis zur Abklärung einiger bekannter Paradoxien vorgestossen wird. Besonders hervorzuheben ist, dass mit grosser Sorgfalt auf viele jener Ausdrucksweisen der mathematisch-logischen Fachsprache eingegangen wird, die erfahrungsgemäss dem Anfänger Verständnisschwierigkeiten bieten und die ohne genaue Erklärung leicht zu Missverständnissen führen. W. PROKOP

I. I. PRIWALOW: *Einführung in die Funktionentheorie*, Teil I
163 Seiten mit 71 Figuren. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek Bd. 21. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1958

Das vorliegende erste der drei in dieser Sammlung der Funktionentheorie gewidmeten Bändchen führt bis zur Behandlung der allgemeinen linearen Funktion und der durch sie vermittelten Abbildungen. Der Zusammenhang mit der Lobatschewskischen Geometrie wird ausführlich beschrieben. Für einen ersten Einblick in das Wesen der komplexen Funktionentheorie ist das Büchlein dank seiner klaren Darstellung gut geeignet. E. TROST

M. MILLER: *Variationsrechnung*
131 Seiten mit 23 Figuren. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek Bd. 24. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959

Das als erste Einführung in die Variationsrechnung gedachte Bändchen erfüllt seinen Zweck vortrefflich. Zahlreiche vollständig durchgerechnete Beispiele, die zu einem grossen Teil aus den Arbeiten EULERS zur Variationsrechnung stammen, illustrieren die ausführlich und klar dargestellte Theorie. Natürlich kann nur in wenigen Fällen gezeigt werden, dass die aus der Eulerschen Differentialgleichung gefundene Funktion wirklich Extremalfunktion ist (hinreichende Bedingungen). Das Hamiltonsche Prinzip und die isoperimetrischen Probleme werden ausführlich behandelt. An einigen Beispielen erhält der Leser Einblick in die Approximationsmethoden (Methoden von EULER und RITZ). Auch die Bedeutung der Variationsrechnung zur Lösung von Rand- und Eigenwertaufgaben wird durch zwei sehr instruktive numerische Beispiele aufgezeigt. E. TROST

H. G. EGGLESTON: *Problems in Euclidean Space*
165 S. Pergamon Press, London 1957

Man muss immer wieder staunen über die Unzahl einfachster, ja elementarer Fragestellungen, die nicht im Rahmen der zu hoher Vollkommenheit entwickelten allgemeinen Theorien methodisch gelöst werden können, sondern zu ihrer erfolgreichen Bearbeitung stets individuell ersonnene Kunstgriffe und Einfälle ad hoc erforderlich machen. Man denke beispielsweise daran, wie wenige von den typischen Extremalproblemen der Konvexgeometrie den Ansätzen der Variationsrechnung direkt zugänglich sind. Regellosigkeit, Vielzahl der Parameter und Natur der auftretenden Funktionen verunmöglichen in der Regel den schulmässigen Einsatz der Analysis. Gerade in diesen Sachgebieten der Geometrie, wo es auf die individuelle Bearbeitung reizvoller Einzelprobleme ankommt, hat sich der Verfasser des vorliegenden Buches durch Initiative und Scharfsinn besonders verdient gemacht. Eine stattliche Reihe schöner Resultate sind im Verband mit zehn Problemen in buchmässiger und ansprechender Form verarbeitet. Diese zehn, äusserlich nur wenig zusammenhängenden Fragen können alle mit dem Begriff der Konvexität in Verbindung gebracht werden. Die zehn Probleme: 1. Kriterien dafür, dass eine ebene offene Punktmenge als Durchschnitt einer absteigenden Folge offener und zusammenhängender Punktmengen darstellbar ist; Zusammenhang mit funktionentheoretischen Fragen von W. RUDIN und anderen. 2. Vollständige Lösung eines von S. ULAM stammenden Problems betreffend Approximation von Homeomorphismen in der Ebene. 3. Extremalprobleme, die sich bei Projektion linearer Punktmengen von vorgeschriebener Hausdorffscher Länge ergeben. 4. Die erstmals vom Verfasser gefundene Lösung des Problems von K. BORSUK im Falle des gewöhnlichen Raumes. 5. Sätze vom Dowkerschen Typ; Beantwortung einiger von L. FEJES TÓTH aufgeworfenen Fragen betreffend die Approximation konvexer Bereiche durch ebensolche Vielecke. 6. Verschiedene Ergebnisse im Anschluss an Fragen von P. C. HAMMER über Mehrfachschnittpunkte von Durchmessern bei ebenen Eibereichen und anderes. 7. Abschätzung der Asymmetriekoeffizienten im Sinne von A. S. BESICOVITCH für Orbiformen. 8. Orbiformen in konvexen Bereichen vorgeschriebener Dicke. 9. Extremalprobleme bei Dreiecken, die vorgegebenen konvexen Bereichen umschrieben sind. 10. Schätzung von Dimension und Masszahl bei ebenen Restmengen vom Typ des Cantorschen Diskontinuums. H. HADWIGER

Contributions to the Theory of Games

Band 4, herausgegeben von A. W. TUCKER und R. D. LUCE. 453 Seiten. Princeton University Press 1959

Dieser voraussichtlich letzte Band mit Beiträgen zur Spieltheorie ist hauptsächlich dem n-Personenspiele mit $n > 2$ gewidmet. Bekanntlich hat sich JOHN VON NEUMANN sehr intensiv mit diesem Teil der Theorie befasst. Seine Studien führten zur Betrachtung der nichtstrikte-kompetativen Spiele und damit zu mathematischen Darstellungen, die der Realität nahekommen, das heisst gewissen schwer lösbaren, aber wichtigen Problemen der Sozialwissenschaft in struktureller Hinsicht adäquat sind. – Im Laufe der Jahre ist indessen die von NEUMANN und MORGENSTERN entwickelte Konzeption, insbesondere die Begründung und Verwendung der charakteristischen Funktion, vielfach angezweifelt worden, und es hat sich eine weitere Betrachtungsweise herausgebildet, die sich auf eine veränderte Formulierung stützt. Im vorliegenden Band sind beide Richtungen vertreten, daneben wird auch versucht, gewisse Grundbegriffe aus dem Zwei-Personen-Spiel, die sich gut bewährt haben, zu erweitern.

Mehrere Autoren bemühen sich um die Beantwortung der bedeutungsvollen Frage, ob alle endlichen Spiele eine Lösung im Sinne von NEUMANN-MORGENSTERN besitzen. Allgemeine Ergebnisse konnten indessen nicht gewonnen werden, dagegen ergaben sich neue Einsichten, die auf zahlreiche Zusammenhänge hinweisen und auch einen Einblick in die Komplexität der Materie vermitteln. CHAPLEY meint, es gebe praktisch keine Grenzen in der Verflochtenheit der Lösungen. – Als Spezialfall wird durch MILLS das einzigartige Vier-Personen-Spiel betrachtet, das in eleganter Weise – wie schon NEUMANN nachgewiesen hat – durch die Eckpunkte eines Würfels repräsentiert werden kann.

Allgemein gewinnt man den Eindruck, dass sich hier dem Mathematiker sehr schöne Probleme darbieten, dass aber dieser bedeutungsvolle Teil der Theorie noch stark in der Entwicklung begriffen ist, so dass es wohl noch grosser Anstrengungen bedarf, bis es gelingen mag, Eleganz und Geschmeidigkeit in der mathematischen Darstellung mit der notwendigen Zutrefflichkeit zur Realität zu verbinden. P. NOLFI

V. N. FADDEEVA: *Computational Methods of Linear Algebra*

Übersetzt von C. D. BEUSTER. 252 Seiten. Dover Publications, New York 1959

Zahlreiche Fragestellungen der Naturwissenschaften und Technik führen in ihrer mathematischen Formulierung zu numerischen Problemen der linearen Algebra, wobei die Auflösung linearer Gleichungssysteme und die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren im Vordergrund stehen. Seit man mit Hilfe moderner Rechenautomaten auch umfangreiche Probleme dieser Art wirklich bewältigen kann, ist das Interesse für wirksame numerische Methoden der linearen Algebra ausserordentlich gewachsen. Das Buch von Frau V. N. FADDEEVA ist wohl in erster Linie für einen Leser geschrieben worden, der möglichst schnell einen Überblick über die theoretischen Grundlagen und die wichtigsten praktischen Methoden gewinnen will. Es erreicht diesen Zweck ausgezeichnet.

Im ersten Kapitel wird in kurzem Überblick die Theorie dargestellt, öfters ohne ausführliche Beweise. Das zweite Kapitel bringt die wichtigsten Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, während das dritte von der Berechnung von Eigenwerten und -vektoren handelt. Durch viele durchgerechnete Beispiele wird das Verständnis sehr erleichtert. Die kurze und dafür übersichtliche Bibliographie wurde vom Übersetzer amerikanischen Verhältnissen angepasst.

Im übrigen ist die Initiative des Verlages sehr zu begrüssen, auch mathematische Werke im Stile der «Taschenausgaben» zu publizieren. W. NEF

WERNER SCHAEFER:

Fünfstellige Logarithmen und Zahlentafeln für die 90°-Teilung

3. durchgesehene Auflage. 164 Seiten mit 4 Figuren. J. Lindauer Verlag (Schaefer), München 1958

Inhalt: Mantissen der dekadischen Logarithmen, numerische Werte der trigonometrischen Funktionen auf vier Dezimalen, Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, Quadratzahlen und Quadratwurzeln und die üblichen Hilfstafeln. Bei den fünfstelligen Mantissen und den Quadratzahlen wird der Übergang von einer Vorgruppe zur anderen nicht durch einen Stern markiert, sondern die zu derselben Vorgruppe gehörigen Werte sind abwechslungsweise in weisse und grüne Felder zusammengefasst. Bei den trigonometrischen Funktionen wird die Zusammengehörigkeit der Tabellenunterschrift und der rechtsseitigen Winkelangabe dadurch herausgehoben, dass sie weiss auf schwarz erscheinen. Diese beiden Massnahmen, die doch wohl nur für sehr begriffsstutzige Schüler notwendig sind, bringen Unruhe in die Tafel und wirken ausgesprochen unschön. Die Sterbetafel – es wird nur diejenige für Männer gegeben – von 1926 ist veraltet, und ausserdem beginnt sie erst mit dem Alter 20, während für die Schüler gerade der Verlauf während der Jahre 0 bis 20 besonders interessant ist. Das periodische System der Elemente ist auf den neusten Stand gebracht. Aufzins- und Abzinsfaktoren, Endwerte der vorschüssigen und Barwerte der nachschüssigen Zeitrenten sind für 50 Jahre für nicht weniger als 15 Werte zwischen 1% und 10% gegeben. Vielleicht ein Zeichen dafür, dass sich im Wirtschaftswunderland der Zinsfuss noch nicht stabilisiert hat. P. BUCHNER

A. D. ALEXANDROW: *Konvexe Polyeder*

419 Seiten mit 161 Abbildungen. Akademie Verlag, Berlin 1958

Es handelt sich um die in verdankenswerter Weise von Süss† wissenschaftlich geleitete und von HILDEGARD ABETZ (Freiburg im Breisgau) vorgenommene Übersetzung des 1950 im Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur der UdSSR, Moskau-Leningrad, erschienenen russischen Originalwerkes. – Die sehr breit und in den Einzelheiten sorgfältig angelegte Monographie schliesst in ihrer wissenschaftlichen Zielsetzung unmittelbar an die schon im Jahre 1897 von MINKOWSKI gefundenen Sätze über die bis auf Translationen eindeutige Bestimmtheit konvexer Polyeder durch Stellungen und Inhalte ihrer Seitenflächen an. Es ist dem Verfasser gelungen, mit Beanspruchung von neuen, zum Teil der anschaulichen Topologie verpflichteten Begriffen und Tatsachen, den ganzen mit Existenz- und Einzigkeitsfragen bei Polyedern zusammenhängenden Problemkomplex durch bedeutende neue Ergebnisse zu bereichern und abzurunden. Die ausserordentlich ausführliche, mit Beispielen, Übungsaufgaben und suggestiven Figuren durchwirkte Darbietung macht das Buch jedem mit den Grundbegriffen der Elementargeometrie vertrauten Leser zugänglich. Andererseits bürgt die Strenge, mit der die anschaulich-geometrischen Sachverhalte entwickelt werden, dafür, dass auch für die wissenschaftlich weniger elementaren Erweiterungs- und Ausdehnungsmöglichkeiten nach dem Approximationsprinzip ein gesichertes Fundament zur Verfügung steht. Man denke hier in erster Linie an die scharfsinnigen neuen Methoden der direkten Infinitesimalgeometrie, wie sie von ALEXANDROW und seiner Schule gehandhabt werden und in dem 1948 erschienenen Werk *Innere Geometrie konvexer Flächen* vom Verfasser dargestellt worden sind. Die elf Kapitel: 1. Grundbegriffe und einfachste Eigenschaften konvexer Polyeder; 2. Methode und Ergebnisse; 3. Die Eindeutigkeit eines Polyeders mit gegebenem Netz; 4. Die Existenz eines Polyeders mit gegebenem Netz; 5. Die Verheftung und Verbiegung von Polyedern mit Rand; 6. Kongruenzbedingungen von Polyedern mit parallelen Seitenflächen; 7. Existenzsätze für Polyeder mit vorgegebenen Stellungen der Seitenflächen; 8. Der Zusammenhang der Kongruenzbedingung von Polyedern mit parallelen Seitenflächen mit andern Problemen; 9. Polyeder mit Ecken auf gegebenen Strahlen; 10. Die Starrheit eines konvexen Polyeders mit stationärem Netz; 11. Starrheitsbedingungen eines Polyeders mit gegebenen Stellungen der Seitenflächen. H. HADWIGER

Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften

Band I 1, Heft 3, Teil II: W. SPECHT, *Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten* (1958)

Band I 2, Heft 10, Teil II: M. DEURING, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation* (1958)

Band I 2, Heft 13, Teil I: LOO-KENG HUA, *Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie* (1959)

B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leipzig

Bei der Interpretation, die man heute dem Worte Algebra gibt, kann man schwanken, ob man das Teilgebiet der Mathematik, über das SPECHT in der vorliegenden Monographie referiert, und das man wohl als *die analytische Theorie der Polynome* bezeichnen kann, eher zur Algebra, wie das früher der Fall war, oder zur komplexen Funktionentheorie rechnen soll. Das Hauptproblem ist die Frage der Nullstellenverteilung entweder eines reellen Polynoms auf der Zahlgeraden oder eines Polynoms mit komplexen Koeffizienten in der Ebene der komplexen Zahlen.

In einem 1. Kapitel gibt SPECHT eine Übersicht über die Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. Dann bespricht er die Arbeiten über die symmetrischen Funktionen der Nullstellen eines Polynoms, über die Änderung der Nullstellen eines Polynoms bei stetiger Variation seiner Koeffizienten und über die Darstellung der Nullstellen eines Polynoms als Funktionen der Polynomkoeffizienten.

In einem 2. Kapitel behandelt SPECHT die *Schrankensätze*, das heisst im wesentlichen die Bestimmung eines möglichst kleinen Gebietes der komplexen Ebene, in dem alle oder eine gewisse minimale Anzahl der Nullstellen eines gegebenen Polynoms liegen, und daran anschliessend im 3. Kapitel die Zählung der Nullstellen in vorgegebenen Gebieten bzw. bei reellen Polynomen auf vorgeschriebenen Strecken der Zahlgeraden (im letzteren Fall auch die Vorzeichenregeln).

Jedes Polynom $w = f(z)$ induziert eine konforme Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene mit Ausnahme der Punkte, die Nullstellen der Ableitung $f'(z)$ sind, und man bezeichnet daher diese Punkte auch als *die kritischen Punkte des Polynoms* $f(z)$. In einem 4. Kapitel referiert SPECHT über die Arbeiten, die die Frage nach der Lage der kritischen Punkte in der Zahlenebene untersuchen, wenn die Verteilung der Nullstellen von $f(z)$ selbst als bekannt vorausgesetzt wird, und Arbeiten, die verwandte Fragestellungen beschlagen.

Das letzte, 5. Kapitel, bringt Kompositionssätze, das heisst Untersuchungen, die die Nullstellenverteilungen *mehrerer* Polynome, deren Koeffizienten gewissen Relationen genügen oder gewisse gemeinsame Eigenschaften besitzen, miteinander vergleichen.

Auf die Aufgabe, die Nullstellen bis auf eine vorgeschriebene Genauigkeit approximativ zu bestimmen (*Praxis der algebraischen Gleichungen*), wird im vorliegenden Bericht nicht eingetreten.

In seiner Monographie gibt DEURING zuerst eine independente Theorie der Modulfunktionen erster und höherer Stufen und behandelt hierauf die Webersche elliptische Funktion und ihre Teilwerte.

Ist f eine natürliche Zahl, k ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, R der Ring der Zahlen von k zum Führer f, so adjungiere man zu k den Wert, den die absolut invariante Modulfunktion erhält, wenn man als Argument den Quotienten der beiden Basen eines zu f teilerfremden ganzen Ringideals von R einsetzt (also einen «singulären Modul»). Es sei Ω_R der entstehende Körper. Wenn $f = 1$ ist, sei er mit Ω bezeichnet. Dann beweist DEURING auf zwei Arten den Satz («erster Hauptsatz»), dass Ω_R der Klassenkörper ist, der zur Ringidealklassengruppe mit dem Führer f von k gehört. Der erste Beweis benutzt die allgemeine Theorie der relativ-abelschen Zahlkörper und ist dementsprechend kurz. Der Leitgedanke des zweiten Beweises ist, nachdem die Klasseninvarianten als algebraische Zahlen erkannt sind, die Struktur des Körpers Ω_R mit Hilfe der Theorie der Modulfunktionen zu bestimmen, das heisst, im wesentlichen die Galois-Gruppe der Erweiterung Ω_R über k als mit der Ringidealklassengruppe von R isomorph zu erkennen und das Reziprozitätsgesetz für diese Erweiterung zu beweisen und dabei von der Theorie der algebraischen Zahlen nur elementare Sätze zu benutzen.

Es seien jetzt $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{w}$ zwei zueinander teilerfremde ganze Ideale von k, dabei sei $\mathfrak{F}$ vom Einheitsideal verschieden. Man nehme nun als Perioden der Weberschen elliptischen Funktion die beiden Basen von $\mathfrak{w}$ und als Argument eine Zahl γ von k mit der Eigenschaft, dass das Hauptideal (γ) als gekürzter Bruch ganzer Ideale geschrieben, den Nenner $\mathfrak{F}$ und einen durch $\mathfrak{w}$ teilbaren Zähler hat. Die Adjunktion dieses Funktionswertes zu Ω ergebe den Körper $*(\mathfrak{F})$. Dann beweist DEURING wieder auf zwei Arten den Satz («zweiter Hauptsatz»), dass $*(\mathfrak{F})$ der Klassenkörper ist, der zur Strahlklassengruppe mit dem Führer $\mathfrak{F}$ von k gehört. Analog benutzt der erste Beweis die allgemeine Theorie der relativ-abelschen Körper. Der zweite Beweis, bei dem wieder nur elementare Sätze aus der algebraischen Zahlentheorie gebraucht werden, stützt sich auf die Theorie der Modulfunktionen und der elliptischen Funktionen und ist teilweise neu.

Gegenüber früheren Darstellungen wird mit HASSE die Verwendung der in den älteren Theorien gebrauchten Funktionen höherer Stufen möglichst ausgeschaltet, und bis zu den Schlussbemerkungen sind daher im wesentlichen nur Arbeiten von HASSE zitiert. In diesem letzten Abschnitt werden dann einige Hinweise gegeben auf die Literatur über die in der Monographie behandelten Probleme und über einige sich anschliessende Fragen. Es ist aber meines Erachtens schade, dass die genialen Arbeiten von ABEL und KRONECKER aus dem Gebiete der komplexen Multiplikation, dann auch eine Reihe von Untersuchungen aus der Schule von FUETER, wie zum Beispiel die Dissertationen von BINDSCHEDLER und HAGENBUCH, in diesem Enzyklopädieartikel nicht explizite zitiert werden.

Das von LOO-KENG HUA in Peking verfasste Heft wurde von PH. und H. SALIÉ in Leipzig ins Deutsche übersetzt und auch in Leipzig gedruckt.

In übersichtlicher Weise wird über eine sehr grosse Zahl von älteren, neueren und neuesten Abhandlungen über vorwiegend diejenigen Probleme der analytischen Zahlentheorie referiert, zu deren Lösung oder Verschärfung der Aussagen in einem Stadium der geschichtlichen Entwicklung die Exponentialsummen herangezogen wurden. Am Schlusse des Heftes findet sich eine tabellarische Übersicht über den neusten Stand der Forschung (beste bekannte Abschätzung) für eine Reihe wichtiger Fragestellungen.

Da eine detaillierte Charakterisierung des Inhaltes des ausserordentlich reich befrachteten Heftes zu umfangreich würde, beschränken wir uns hier auf die Aufzählung der in den Tabellen aufgeführten Probleme. Dabei sollen p immer eine Primzahl, n eine natürliche und A und x positive Zahlen bedeuten.

a) Das Dichteproblem.

b) Abschätzung des absoluten Betrages der Kloostermanschen und der vollständigen Exponentialsummen.

c) Abschätzung für den kleinsten positiven n-ten Potenznichtrest und die kleinste Primitivwurzel mod p.

d) Anzahl der Primzahlen $< x$ in der Folge der natürlichen Zahlen oder in einem Intervall $(A, A + x)$. Anzahl der Primzahlen und kleinste Primzahl in einer arithmetischen Folge natürlicher Zahlen.

e) Grössenordnung der Differenz zweier aufeinanderfolgender Primzahlen.

f) Die beiden Goldbachschen Vermutungen, das Waringsche Problem, das Prouhet-, oder wie es auch oft bezeichnet wird: Tarry- oder Tarry-Escott-Problem.

g) Gitterpunktsprobleme in zwei-, drei- und mehrdimensionalen Räumen (insbesondere Kreisfläche, Hyperbelsektor, Kugel, Ellipsoid) und die aus ihrer Betrachtung folgenden zahlentheoretischen Anwendungen auf das Teilerproblem und die positiv definiten Formen.

Für die Abfassung seiner Monographie hatte jeder der drei Autoren eine enorme Arbeit auf sich zu nehmen, und jeder Benutzer dieser Hefte ist ihnen zu grossem Danke verpflichtet.

M. GUT

L. BAUMGARTNER: *Gruppentheorie*

Dritte, vollständig neu bearbeitete Auflage. Sammlung Göschen, Band 837. 110 Seiten. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1959

Es handelt sich um eine Einleitung in die Gruppentheorie, die sich besonders um eine gründliche und behutsame Heranführung an die Grundbegriffe und -probleme bemüht. Zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben ermöglichen die Kontrolle des Gelernten. Das Büchlein ist dadurch in hervorragender Weise zum eigenen Studium geeignet, wo eine lebendige Einführung durch Vorlesungen entbehrt wird. Dabei entspricht es innerhalb des naturgemäss eng umrissenen Stoffgebietes durchaus modernen Auffassungen.

M. EICHLER

W. KRULL: *Elementare und klassische Algebra*

2. Teil. Sammlung Göschen, Band 933. 130 Seiten. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1959

Das Buch ist als eine Ergänzung der Lehrbuchliteratur gedacht und wendet sich durchaus nicht nur an den ersten Anfänger. Ja es wird im Prinzip erst dann mit Gewinn studiert werden können, wenn man die Grundlagen der Gruppentheorie und Galoisschen Theorie beherrscht. Der Ausbau dieser Theorie (und ihrer Verallgemeinerung) ist der Gegenstand des inhaltsreichen und anregenden Buches. Dabei geht es vorwiegend um 3 Probleme: 1. Explizite Berechnung der Galois-Gruppe. 2. Affine und projektive Darstellungen der Galois-Gruppe. 3. Auflösung reeller Gleichungen durch reelle Radikale.

M. EICHLER