Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Für alle Ketten in bezug auf 3 gegebene Kugeln a, b, c bleibt dieser Mittelwert m gleich.

Zum Vergleich berechnen wir noch das harmonische Mittel der Radien r_1 und r_2 der beiden Berührungskugeln, deren Mittelpunkte in der Verbindungsebene der Mittelpunkte der 3 gegebenen Kugeln liegen. Aus Symmetriegründen folgt daher die Gleichheit der beiden Nachbarkugeln von r_1 oder r_2 in einer Kette von Berührungskugeln in bezug auf die 3 gegebenen Kugeln a, b, c. Wir setzen daher in (17) und (18) $\varrho_i = \varrho_{i+2}$ und berechnen $\varrho_{i+1} = r_{1,2}$. Man findet

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \pm 2\sqrt{\frac{a+b+c}{a\,b\,c}}, \tag{23}$$

folglich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}, \tag{24}$$

in Worten: Die Radien r_1 und r_2 besitzen dasselbe harmonische Mittel wie die Radien einer beliebigen Kette von Berührungskugeln in bezug auf die 3 gegebenen Kugeln.

Unter Benützung von (18) erhält man noch die folgende Beziehung:

$$\left.\begin{aligned}\mu^2 &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_5} - \frac{1}{m}\right)^2\right\}\\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_4} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_6} - \frac{1}{m}\right)^2\right\} = \frac{2\,(a+b+c)}{a\,b\,c},\\ &\text{und es gilt auch}\\ &\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{m}\right)^2\right\} = \frac{4\,(a+b+c)}{a\,b\,c} = 2\,\mu^2.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Diese Formeln zeigen, dass die beiden Tripel $1/\varrho_1$, $1/\varrho_3$, $1/\varrho_5$ und $1/\varrho_2$, $1/\varrho_4$, $1/\varrho_6$ denselben mittleren Fehler besitzen wie die reziproken Werte aller 6 Radien und dass auch

$$\mu\left(\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots, \frac{1}{\varrho_6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mu\left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}\right) \tag{26}$$

gilt. Die Formeln (17) und (18) gestatten, aus a, b, c und beliebig gewähltem ϱ_1 die übrigen Radien $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_6$ einer Kette von Berührungskugeln zu berechnen; aber umgekehrt können auch aus 3 Radien einer Kette von Berührungskugeln zunächst die 3 andern, und dann zu beliebig gewähltem a die zugehörigen Werte von b und c berechnet werden. Daher gehören auch zu einer bestimmten 6er-Reihe unbegrenzt viele 3er-Reihen von Berührungskugeln. Aus (22) und (25) folgen für je eine solche 6er und 3er-Reihe die Beziehungen

$$3\,m_3 = m_6; \qquad \frac{\mu_3^2}{m_3^2} + \frac{3\,\mu_6^2}{m_6^2} = 2. \tag{27}$$

Dabei bedeuten m_3 bzw. m_6 die arithmetischen Mittel der reziproken Werte der Kugelradien der beiden Reihen und μ_3 bzw. μ_6 die mittleren Fehler dieser Werte.

A. Aeppli, Zürich

Aufgaben

Aufgabe 333. Es sei $A = (a_{ik})$ die Stifel-Pascalsche Dreiecksmatrix, also $a_{ik} = \binom{i}{k}$ für $i, k = 0, 1, 2, \ldots$. Man beweise für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ die Formel

$$A^n = (a_{ik}\,n^{i-k}).$$

J. Paasche, München

Lösung: Die Richtigkeit der Formel ist für $n = 1$ evident. Wir nehmen nun an, dass die Formel $A^n = (a_{ik}\,n^{i-k})$ für n bewiesen sei, und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt.

In der Matrix $C = A^n A = (c_{ik})$ ist c_{ik} das innere Produkt der Zeile i von A^n mit der Spalte k von A, also

$$c_{ik} = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{i}{k} n^{i-q} \binom{q}{k}.$$

Für $q < k$ ist $\binom{q}{k} = 0$, und für $q > i$ ist $\binom{i}{q} = 0$. Die Summendarstellung für c_{ik} ergibt daher nur für $k \leqq q \leqq i$ nicht verschwindende Summanden. Also ist

$$c_{ik} = \sum_{q=k}^{i} \binom{i}{q} \binom{q}{k} n^{i-q}.$$

Wegen

$$\binom{i}{q} \binom{q}{k} = \frac{i!}{q!\,(i-q)!} \cdot \frac{q!}{k!\,(q-k)!} \cdot \frac{(i-k)!}{(i-k)!} = \binom{i}{k} \binom{i-k}{q-k}$$

gilt

$$c_{ik} = \binom{i}{k} \sum_{q=k}^{i} \binom{i-k}{q-k} n^{i-q} = a_{ik} (n+1)^{i-k},$$

wodurch die Richtigkeit der Formel $A^n = (a_{ik} n^{i-k})$ auch für $n+1$ und damit für jeden positiven Wert von n bewiesen ist. Die Formel gilt auch für $n = 0$ und ergibt in diesem Fall die Einheitsmatrix $A^0 = E = (e_{ik})$ mit $e_{ik} = 1$ für $i = k$ und $e_{ik} = 0$ für $i \neq k$, wenn man $0^0 = 1$ setzt. Da die Determinante $|A^n| = 1 \neq 0$ ist, so existiert zur Matrix $A^n = (a_{ik} n^{i-k})$ die inverse Matrix $A^{-n} = (a_{ik} (-n)^{i-k})$, und die Formel für A^n gilt somit auch für negative Werte von n. Übrigens kann man leicht nachweisen, dass

$$A^n A^{-n} = (e_{ik}) \quad \text{mit} \quad e_{ik} = \sum_{q=0}^{\infty} \binom{i}{q} n^{i-q} \binom{q}{k} (-n)^{q-k}$$

$$= \binom{i}{k} n^{i-k} \sum_{q=k}^{i} (-1)^{q-k} \binom{i-k}{q-k} = \binom{i}{k} (n-n)^{i-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

die Einheitsmatrix ergibt.

K. Grün, Linz (Donau)

Weitere Lösungen sandten J. C. Binz (Bern), L. Carlitz (Durham, N. C., USA), E. Herrmann (Porz, Rhein), R. Lauffer (Graz), H. Meili (Winterthur), H. Vogler (Wien).

Aufgabe 334. In einer Ebene sind sechs Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ gegeben. Gesucht werden zwei Kegelschnitte, die sich in A_1 und A_4 berühren und von denen der eine noch durch A_2 und A_3, der andere durch A_5 und A_6 geht.

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung: Die Gerade $m = A_1A_4$ ist die Berührungssehne der beiden gesuchten, einander berührenden Kegelschnitte, M der gemeinsame Pol von m bezüglich dieser Kegelschnitte. Dieser Pol M kann nun auf folgende höchst einfache Art (mit dem Lineal allein) gefunden werden.

Das Büschel aller Kegelschnitte durch $A_1A_2A_3A_4$ besitzt das Dreieck PQR als gemeinsames Poldreieck. Dieses ist das Diagonaldreieck des vollständigen Vierseits $A_1A_2A_3A_4$. Die Pole aller Kegelschnitte dieses Büschels bezüglich m müssen, da m den Eckpunkt P des gemeinsamen Poldreiecks enthält, auf der Polaren von P ($QR = p$) liegen, also auch der Pol M des gesuchten Kegelschnittes. Bestimmt man nun das Poldreieck UVW des Kegelschnittbüschels $A_1A_4A_5A_6$, so findet man ganz analog, dass der Pol des zweiten gesuchten Kegelschnittes bezüglich m auf der Polaren u von U liegen muss. M ergibt sich somit als der Schnittpunkt von u und p.

Durch den Punkt M aber sind die beiden gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte in A_1 und A_4 eindeutig festgelegt. Von jedem der beiden Kegelschnitte kennt man nun ausser vier Punkten noch die Tangenten in zwei derselben. Die Kurven können sodann nach bekannten Methoden konstruiert werden. E. MANHARDT, Wien

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Brüssel), K. GRÜN (Linz), R. LAUFFER (Graz), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest), G. UNGER (Dornach), H. VOGLER (Wien).

Aufgabe 335. Man beweise: Ist α eine irrationale Zahl zwischen Null und Eins, dann gibt es eine Folge von Stammbrüchen $1/z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, derart, dass

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{z_i} \quad \text{und} \quad z_{k+1} > z_k^2 - z_k .$$

R. LAUFFER, Graz

Lösung: Wir erklären α_i und z_i rekursiv durch $\alpha_1 = \alpha$,

$$\alpha_i - \frac{1}{z_i - 1} < 0 < \alpha_i - \frac{1}{z_i} = \alpha_{i+1} .$$

Dann folgt

$$\frac{1}{z_{i+1}} < \alpha_{i+1} < \frac{1}{z_i - 1} - \frac{1}{z_i}, \quad z_{i+1} > (z_i - 1)\, z_i ,$$

was zu beweisen war. H. LENZ, München

E. HERRMANN (Porz am Rhein) weist darauf hin, dass der behauptete Sachverhalt sich sofort aus folgendem Satz von SYLVESTER (siehe zum Beispiel O. PERRON, *Irrationalzahlen*, 3. Aufl., S. 119) ergibt:

Jede Zahl α lässt sich auf eine und nur auf eine Weise in eine Sylvestersche Reihe

$$\alpha = c + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{Z_{\nu+1}}$$

entwickeln, das heisst eine Reihe, bei der c und Z_ν ganze Zahlen sind, die den Ungleichungen

$$Z_1 \geqq 2, \quad Z_{\nu+1} \geqq (Z_\nu - 1)\, Z_\nu + 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen. Umgekehrt ist jede Reihe dieser Form konvergent. Ihr Wert ist dann und nur dann rational, wenn in der vorstehenden Ungleichung für hinreichend grosse Werte von ν dauernd das Gleichheitszeichen gilt.

Weitere Lösungen sandten A. MAKOWSKI (Warschau) und H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 336. Es sei

$$a_0 \geqq 0, \quad a_0 + b_0 > 0, \quad a_1^2 - a_0 a_2 \leqq 0, \quad D = (a_1 + b_1)^2 - (a_0 + b_0)\,(a_2 + b_2) > 0 .$$

Die Kurve

$$y^4 + 2 y^2 (b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2) + (a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2)^2 = 0$$

begrenzt dann zwei symmetrische Flächenstücke, deren Inhalt berechnet werden soll.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Wir setzen

$$a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2 = A, \quad b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2 = -B .$$

Offenbar ist $A \geqq 0$. Das oberhalb der x-Achse liegende Flächenstück setzt sich aus den rechteckigen «Streifen» $(y_1 - y_2)\, dx$ zusammen, wobei $y_1 > y_2 > 0$ und

$$y_1 - y_2 = \sqrt{B + \sqrt{B^2 - A^2}} - \sqrt{B - \sqrt{B^2 - A^2}} \equiv \sqrt{2\,(B - A)} .$$

Verschiebt man die Streifen parallel zur y-Achse so, dass ihre Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, so wird die neue Fläche, die nach dem Prinzip von CAVALIERI denselben

Inhalt wie die gesuchte hat, von der Kurve $y = \pm (y_1 - y_2)/2$ begrenzt. Diese Kurve ist eine Ellipse. Setzt man nämlich

$$x + \frac{a_1 + b_1}{a_0 + b_0} = X, \quad y = Y,$$

so ist

$$2\,y^2 + A - B = 2\,Y^2 + (a_0 + b_0)\,X^2 - \frac{D}{a_0 + b_0} = 0\,.$$

Die Halbachsen dieser Ellipse sind $\sqrt{D}/(a_0 + b_0)$, $\sqrt{D/2\,(a_0 + b_0)}$. Für die gesuchte Fläche erhält man somit

$$\frac{D\,\pi}{(a_0 + b_0)^{3/2}\sqrt{2}}\,.$$

Eine weitere Bearbeitung der Aufgabe legte E. HERRMANN (Porz am Rhein) vor.

Aufgabe 337. Sei m eine natürliche Zahl. Man beweise den Satz: Liegen m unabhängige Variable $a_1, \ldots, a_m$ vor, so gilt die Identität

$$\det\left|0^{|i-k|} - a_i\,a_k\right|_{i,\,k=1,\ldots,m} = 1 - (a_1^2 + \cdots + a_m^2).$$

Beispiel $m = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 - a\,a & -a\,b \\ -b\,a & 1 - b\,b \end{vmatrix} = 1 - (a^2 + b^2).$$

I. PAASCHE, München

Solution: Let A denote the matrix $(a_r\,a_s)$ $(r, s = 1, 2, \ldots, n)$. We shall prove the more general result that the characteristic polynomial of A is

$$f(x) = x^m - (a_1^2 + \cdots + a_m^2)\,x^{m-1}. \qquad (*)$$

Then

$$|\delta_{rs} - a_r\,a_s| = f(1) = 1 - (a_1^2 + \cdots + a_m^2).$$

Now it is evident that $A^2 = k\,A$, where $k = a_1^2 + \cdots + a_m^2$. Thus the characteristic roots of A are either 0 or k. Since the rank of A is equal to 1, only one characteristic root can be different from 0. Hence (*) follows. L. CARLITZ, Durham, N.C. (USA)

Dieser allgemeinere Satz wurde schon früher von A. DINGHAS (Berlin) in seiner Arbeit *Zur Metrik nichteuklidischer Räume* [Math. Nachr. *1*, 287–291 (1948)] auf folgende Weise gewonnen: Es sei $g_{ik} = \delta_{ik} - x\,a_i\,a_k$ (δ_{ik} = Kronecker-Symbol). Eine leichte Rechnung zeigt, dass die zweite Ableitung von $|g_{ik}|$ nach x aus einer Summe von Determinanten gebildet wird, die zwei proportionale Spalten haben und somit verschwinden. Folglich ist $|g_{ik}|$ linear in bezug auf x und hat die Form $a + b\,x$. Setzt man in $|g_{ik}|$ und in $d|g_{ik}|/dx$ für x den Wert Null, so ergibt sich $a = 1$ und $b = -a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_m^2$.

W. EVERLING (Stuttgart), F. LEUENBERGER (Zuoz) und J. ZOFFMANN (Zrenjanin, Jugoslawien) verwenden die für eine m-reihige quadratische Matrix A geltende Beziehung

$$|x\,\delta_{ik} - A| = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v\,S_v\,x^{m-v},$$

wo S_v die Summe sämtlicher v-reihiger Hauptminoren von A bedeutet. In unserem Fall ist $S_v = 0$ für $v \geqq 2$, da A den Rang 1 hat.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. C. BINZ (Bern), F. ERWE (Bonn), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland), R. STEUERWALD (Alzing, Deutschland), H. ZEITLER (Weiden, Oberpfalz).

Aufgabe 338. Die Punkte P_4, Q_1, Q_4, Q_7 der Ebene sind linear unabhängig gegeben. Auf der Geraden $[P_4 Q_7]$ ist der Punkt Q_5 beliebig gegeben. Auf der Geraden $[Q_4 Q_7]$ ist der Punkt P_5 beliebig gegeben. Die Punkte P_7, Q_0, P_3, P_1 und Q_3 erhält man aus den gegebenen Punkten durch Verbinden und Schneiden, wobei die Punktetripel (P_i, P_j, P_k) und

(P_i, Q_j, Q_k) kollinear sind, wenn $i + j + k \equiv 0 \pmod 8$ ist. [Zum Beispiel sind $(P_7 P_4 P_5)$ und (P_7, Q_4, Q_5) kollineare Tripel.] Man zeige, dass die Geraden $[P_1 P_7]$, $[P_3 P_5]$, $[Q_1 Q_7]$, $[Q_3 Q_5]$ durch einen Punkt P_0 gehen. R. LAUFFER, Graz

Lösung: Wirft man durch eine projektive Abbildung P_4 und Q_4 ins Unendliche, so ergibt sich eine Figur mit $\overrightarrow{P_1 Q_7} = \overrightarrow{P_3 Q_5} = \overrightarrow{Q_1 P_7} = \overrightarrow{Q_3 P_5}$, die sich als Parallelprojektion eines Parallelflachs auffassen lässt. P_1 und P_7, P_3 und P_5, Q_1 und Q_7, Q_3 und Q_5 erscheinen als Bilder von Gegenecken und P_0 als Bild des Schnittpunktes der Körperdiagonalen. Daher ist P_0 (als Mitte von $Q_1 Q_7$) unabhängig von der Wahl von Q_5 und P_5.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Dieselbe Lösung legte G. UNGER (Dornach) in Form einer Figur ohne Text vor.

Neue Aufgaben

370. Für wieviele Zahlen der mod p verschiedenen Restklassen $1, 2, \ldots, p-2$ ist

$$\operatorname{ind} a < \operatorname{ind}(a+1), \quad 0 \leqq \operatorname{ind} a \leqq p-2\,?$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

371. Sind a, b, c, d gerichtete Gerade (Speere) der euklidischen Ebene und sind $\widehat{a\,b}$, $\widehat{a\,c}$, $\widehat{a\,d}$, $\widehat{b\,c}$, $\widehat{b\,d}$, $\widehat{c\,d}$, von 0 und π verschiedene Winkel zwischen 0 und 2π, dann ist

$$\sin\widehat{a\,b}\cdot\sin\widehat{c\,d} + \sin\widehat{a\,d}\cdot\sin\widehat{b\,c} = \sin\widehat{a\,c}\cdot\sin\widehat{b\,d}.$$

R. LAUFFER, Graz

372. Ein Tetraeder mit den Seitenflächen a_i und den zugehörigen Höhen h_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ habe den Inkugelradius ϱ und den Umkugelradius r. Der Mittelpunkt der Umkugel liege im Innern des Tetraeders. Man beweise folgende Ungleichung:

$$16\,\varrho \leqq 4\prod_{i=1}^{4} h_i^{1/4} \leqq \sum_{i=1}^{4} h_i \leqq \left(4 + \sqrt{2}\right) r.$$

J. BERKES, Szeged

373. Ein Rhombus vom Umfang 4 besitze in orthonormierten kartesischen Koordinaten die Eckpunkte $(0, 0)$, (x, ξ), (y, η), (z, ζ). Es sei φ der Rhombuswinkel im Ursprung und

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} x & \xi \\ y & \eta \\ z & \zeta \end{pmatrix}.$$

Man zeige, dass die Eigenwerte von AA' nur von φ, nicht aber von der Lage des Rhombus abhängen. Für welche φ werden die Eigenwerte einander gleich?

I. PAASCHE, München

Berichtigung zur Aufgabe Nr. 367 [El. Math. *14*, 134 (1959)]: Der zweitletzte Satz des ersten Abschnittes muss lauten: Gleichheit gilt für $n = 0$ nur, falls O der Höhenschnittpunkt eines orthozentrischen Tetraeders ist, im Fall $n = 1, 2$ nur für den Mittelpunkt O eines regulären Tetraeders.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Es ist seit den Veröffentlichungen von O. NEUGEBAUER bekannt, welch erstaunlich hohe Stufe der Entwicklung die babylonische Mathematik erreicht hat. Um so befremdender war es, dass man jahrzehntelang für π keinen besseren babylonischen Näherungswert kannte als 3. Nun wurde 1952 eine Tontafel entziffert, welche diese Lücke

schliesst. Die gebräuchliche Vorschrift für die Kreisberechnung war

$$\text{Fläche} = \frac{1}{12} (\text{Umfang})^2,$$

und der neue Text sagt, dass man ein genaueres Resultat erhalte, wenn man den obigen Wert noch mit 0; 57; 36 multipliziere. Die im Sexagesimalsystem geschriebene Zahl hat den Wert 0,96, woraus sich $\pi \approx 3{,}125$ ergibt! (Nach The Mathematical Teacher *1957*.)

2. «Ducere rectam lineam maximam aut minimam earum, quae transeunt per datum punctum, et jacent inter duas alias lineas sive rectas, sive curvas.» (NEWTON, *Opuscula* 1744, Band I, S. 87.)
▶ Es sei zum Beispiel $P(3; 2)$ der gegebene Punkt, $y = 0$ und $y = x$ die gegebenen Geraden. Der eine Endpunkt der gesuchten Strecke UV sei $U(t; 0)$. Man findet

$$t^4 - 5\,t^3 + 9\,t^2 - 13\,t = 0$$

mit der einzigen passenden Lösung $t = 3{,}48830$. Kinematische Überlegungen zeigen, dass für die minimale Strecke die Lote in U auf $y = 0$, in V auf $y = x$ und in P auf UV durch einen Punkt gehen.

3. Der englische Astronom NEVIL MASKELYNE (1732–1811) fand, dass für $|x| \ll 1$ gilt

$$\frac{\sin x}{x} \approx \sqrt[3]{\cos x}\,.$$

▶ Entwickle $\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3\,x)/4$ in eine Potenzreihe.

4. «Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten der Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, von unveränderlichem Werthe.» (JAKOB STEINER, *Gesammelte Werke*, Band I, S. 267.)
▶ Das heisst: Zeichnet man über der Strecke BC zwei beliebige rechtwinklige Dreiecke BA_1C und BA_2C und wählt man auf BC einen beliebigen Punkt P, so ist

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BA_1P \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle CA_2P = \text{const.}$$

5. Um die Jahrhundertwende machte folgende Aufgabe die Runde: Eine Uhr hat Stunden-, Minuten- und Sekundenzeiger aus der Mitte. Es wird vorausgesetzt, dass alle drei Zeiger gleich lang sind und sich stetig bewegen. Um welche Zeit sind die Spitzen der Zeiger die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks?
▶ Nie! Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: die Reihenfolge Stunden-, Minuten-, Sekundenzeiger und Stunden-, Sekunden-, Minutenzeiger.

Literaturüberschau

V. VOLTERRA:

Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations

226 pages. Dover Publications, New York 1959

Publié tout d'abord en espagnol, puis en traduction anglaise en 1930, cet ouvrage est devenu un des classiques de l'analyse fonctionelle; cette nouvelle édition comporte une préface de EVANS et une remarquable biographie due à WHITTAKER, complétée d'une liste des publications de V. VOLTERRA. CH. BLANC