

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 1

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Diese Aussage lässt sich nach der vom Unterzeichneten kürzlich näher erläuterten Methode leicht nachweisen<sup>1)</sup>.

Werden anstelle der Spiegelungen  $\sigma$  aber Drehungen  $\varrho$  um den Mittelpunkt von  $S$  zugelassen, so bestehen Möglichkeiten, wesentlich mehr als (a) auszusagen. Nach Ergebnissen von DYSON und LIVESAY<sup>2)</sup> kann für ein Rechteck, das einem Grosskreis von  $S$  einbeschrieben ist, die Existenz einer Drehung  $\varrho$  ausgesagt werden, so dass sogar

$$\Phi(\varrho p_1) = \Phi(\varrho p_2) = \Phi(\varrho p_3) = \Phi(\varrho p_4) \quad (b)$$

ausfällt. – Offen bleibt unseres Wissens die Frage, ob die Bedingung (b) auch bei einem beliebigen Rechteck erfüllbar ist oder ob sich stetige Funktionen  $\Phi$  konstruieren lassen, für welche die vier Funktionswerte bei einem passend vorgegebenen Rechteck für keine Drehlage zusammenfallen.

Beim Übergang von (a) zu (b) muss eine neu hinzutretende Bedingung neu erfüllt werden. Bedenkt man, dass auch die Parameterzahl der zum Einsatz gebrachten Abbildungsgruppe zunimmt, so erscheint die oben erwogene Erfüllbarkeit nicht unwahrscheinlich. Unser Problem lautet also: *Lässt sich das Dyson-Livesaysche Theorem auf beliebige der Kugelfläche einbeschriebene Rechtecke ausdehnen?*

H. HADWIGER

## Kleine Mitteilungen

### Eine Verallgemeinerung einer Formel von Descartes

1. In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen: Sind in einem Raum von  $n$  Dimensionen ( $n + 1$ ) Kugeln mit den Radien  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  gegeben und wird vorausgesetzt, dass sich diese paarweise von aussen berühren, so gilt für die Radien  $\varrho'$  und  $\varrho''$  der beiden Kugeln, welche sämtliche gegebenen Kugeln berühren, die Bedingungsgleichung

$$\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{\varrho} \right)^2 = n \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}^2} + \frac{1}{\varrho^2} \right). \quad (1)$$

Für  $n = 2$  erhält man eine Formel, die DESCARTES in einem Briefe an Prinzessin Elisabeth mitteilt [Oeuvres de Descartes par Adam et Tannery, Bd. IV (Paris 1901), S. 49]. Auch JAKOB STEINER kennt diesen Spezialfall (Gesammelte Werke, I, S. 63); er wird die Formel wohl unabhängig von DESCARTES gefunden haben. An einem andern Orte (Gesammelte Werke, I, S. 180) stellt STEINER die Aufgabe: «Zwischen den Radien von 5 Kugeln, von denen je 2 einander berühren, eine Relation zu finden», ohne jedoch eine Lösung anzugeben. Für  $n = 3$  liefert (1) die Antwort auf diese Frage, denn unsere Formel ist symmetrisch in bezug auf die  $(n + 2)$  Radien  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}, \varrho$  und kann als Bedingung aufgefasst werden, die erfüllt sein muss, damit  $(n + 2)$  Kugeln des  $n$ -dimensionalen Raumes sich gegenseitig berühren. Formel (1) kann noch auf eine dritte Weise gedeutet werden: Es ist die Bedingung, die  $(n + 2)$  Punkte, nämlich die Mittelpunkte der Kugeln, erfüllen müssen, damit sie in einem Raum von  $n$  Dimensionen liegen. Als Anwendung von (1) beweisen wir den Schliessungssatz von STEINER über Ketten von Berührungskugeln für den einfachsten Fall, wo die drei gegebenen Kugeln sich selbst paarweise berühren. Für diesen Spezialfall erhalten wir eine Reihe von Beziehungen zwischen den Radien der Kugeln der Kette.

<sup>1)</sup> H. HADWIGER, Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis- und Kugelfläche, El. Math. 14, 49–60 (1959), insbesondere Satz 2.1.

<sup>2)</sup> Literaturangaben vgl. oben zitierte Abhandlung.

2. Für den Beweis von (1) betrachten wir zunächst den Fall  $n = 2$ . Die Bedingung, die vier Punkte erfüllen müssen, damit sie in einer Ebene liegen, lautet bekanntlich

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Dabei bedeutet  $d_{ik}$  die Distanz der Punkte  $P_i$  und  $P_k$  (siehe zum Beispiel KOWALEWSKY, *Die Determinanten*, 1. Aufl., S. 348). Wenn wir voraussetzen, dass die vier gegebenen Punkte Mittelpunkte von Kreisen sind, die sich paarweise von aussen berühren, so gilt

$$d_{ik} = r_i + r_k. \quad (3)$$

Es ist der Fall denkbar, dass ein Kreis, zum Beispiel  $r_k$ , alle übrigen umschliessend berührt; dann gilt für diesen Wert von  $K$

$$d_{ik} = r_i - r_k = r_i + (-r_k), \quad (3')$$

das heisst, unsere Formeln gelten auch für diesen Fall, wenn  $r_k$  durch  $(-r_k)$  ersetzt wird. – Setzt man (3) in (2) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \frac{1}{r_2} \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{r_3} \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{r_4} \\ \hline r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

als Bedingung, dass vier Kreise, die in einer Ebene liegen, sich paarweise berühren. Analog erhält man die Bedingung, dass  $(n+2)$  Kugeln eines  $n$ -dimensionalen Raumes sich paarweise von aussen berühren:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{r_1} \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{r_2} \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 & \frac{1}{r_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & \frac{1}{r_{n+2}} \\ \hline \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} & \dots & \frac{1}{r_{n+2}} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine homogene, symmetrische Funktion 2. Grades der Größen  $1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_{n+2}$ , daher folgt aus (5)

$$\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+2}} \right)^2 - K_n \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_{n+2}^2} \right) = 0, \quad (6)$$

wobei  $K_n$  nur von der Dimensionszahl  $n$  abhängt.

Wir betrachten nun den letzten Radius als unbekannt und setzen daher

$$\frac{1}{r_{n+2}} = \frac{1}{\varrho} = x. \quad (7)$$

Aus (6) wird:

$$\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} + x \right)^2 - K_n \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}^2} + x^2 \right) = 0. \quad (8)$$

Zur Bestimmung von  $K_n$  betrachten wir den Spezialfall  $x_1 = x_2$ , das heisst  $\varrho' = \varrho''$ . Aus Symmetriegründen müssen jetzt die Mittelpunkte  $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$  in einem Raum von  $(n-1)$  Dimensionen liegen und dort die Zentren von Kugeln mit den Radien  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  sein, die sich paarweise von aussen berühren. Folglich gilt

$$\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} \right)^2 - K_{n-1} \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Anderseits folgt aus  $x_1 = x_2$ , dass (8) eine Doppelwurzel besitzt. Durch Differenzieren von (8) erhält man

$$\left. \begin{aligned} 2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} + x \right) - 2 K_n x &= 0, \\ \text{also } x &= \frac{1}{(K_n - 1)} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

eingesetzt in (8) und vereinfacht

$$\left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}} \right)^2 - (K_n - 1) \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_{n+1}^2} \right) = 0. \quad (11)$$

Aus (9) und (11) folgt

$$K_{n-1} = K_n - 1 \quad \text{oder} \quad K_n = K_{n-1} + 1. \quad (12)$$

Man sieht leicht, dass  $K_1 = 1$  ist, dann folgt aus (12)  $K_2 = 2, K_3 = 3, \dots, K_n = n$ , was zu beweisen war.

3. Für  $n = 3$  erhält man aus (1)

$$\frac{1}{\varrho^2} - \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) \frac{1}{\varrho} + \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} - \frac{1}{r_1 r_2} - \dots - \frac{1}{r_3 r_4} \right) = 0, \quad (14)$$

folglich gilt jetzt

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \quad (15)$$

und

$$\frac{1}{\varrho' \varrho''} = \frac{1}{r_1^2} + \dots + \frac{1}{r_4^2} - \frac{1}{r_1 r_2} - \dots - \frac{1}{r_3 r_4}. \quad (16)$$

Wir denken uns nun 3 Kugeln mit den Radien  $a, b, c$ , die sich paarweise von aussen

berühren, gegeben, und konstruieren zu diesen eine Kette von Berührungskegeln, die alle die 3 gegebenen von aussen berühren, so dass auch je 2 benachbarte Kugeln der Kette sich von aussen berühren. Bezeichnet man die Radien von 3 aufeinanderfolgenden Kugeln einer solchen Kette mit  $\varrho_i, \varrho_{i+1}, \varrho_{i+2}$ , so liefern (15) und (16) folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{\varrho_i} + \frac{1}{\varrho_{i+2}} = \frac{1}{\varrho_{i+1}} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{\varrho_i \varrho_{i+2}} = \frac{1}{\varrho_{i+1}^2} - \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \frac{1}{\varrho_{i+1}} + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca} \right). \quad (18)$$

Wir betrachten die ersten 5 Gleichungen von (17):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_3} &= \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_4} &= \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_5} &= \frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ \frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_6} &= \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ \frac{1}{\varrho_5} + \frac{1}{\varrho_7} &= \frac{1}{\varrho_6} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Durch Addition der 1. und 2. bzw. der 4. und 5. dieser Gleichungen findet man

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_4} = 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right), \quad \frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_7} = 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \quad (20)$$

Folglich

$$\varrho_1 = \varrho_7, \quad \text{also auch} \quad \varrho_2 = \varrho_8 \text{ usw.} \quad (21)$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz:** Wenn zu 3 Kugeln mit den Radien  $a, b, c$ , die sich paarweise von aussen berühren, eine Reihe von Kugeln mit den Radien  $\varrho_1, \varrho_2, \dots$  so konstruiert wird, dass je 2 benachbarte Kugeln dieser Reihe sich äußerlich berühren und auch alle Kugeln der Reihe die 3 gegebenen von aussen berühren, dann besteht diese Reihe immer aus 6 Kugeln, gleichgültig, wie der Radius der ersten Kugel gewählt wird.

Dieser Schließungssatz stammt von JAKOB STEINER und wurde von ihm auf andere Weise bewiesen (*Gesammelte Werke*, I, S. 59). Er ist auch ein Spezialfall eines allgemeineren Schließungssatzes, der ebenfalls von STEINER entdeckt wurde (*Gesammelte Werke*, I, S. 136).

Aus (19) folgen die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_4} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_5} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_6} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_5} \right) &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_4} + \frac{1}{\varrho_6} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

in Wörtern: Die harmonischen Mittel der Radien einer Kette von Berührungskegeln sind dieselben für

1. 2 gegenüberliegende Kugeln,
2. 3 Kugeln, die sich nicht gegenseitig berühren und
3. alle 6 Kugeln.

Für alle Ketten in bezug auf 3 gegebene Kugeln  $a, b, c$  bleibt dieser Mittelwert  $m$  gleich.

Zum Vergleich berechnen wir noch das harmonische Mittel der Radien  $r_1$  und  $r_2$  der beiden Berührungskegeln, deren Mittelpunkte in der Verbindungsebene der Mittelpunkte der 3 gegebenen Kugeln liegen. Aus Symmetriegründen folgt daher die Gleichheit der beiden Nachbarkugeln von  $r_1$  oder  $r_2$  in einer Kette von Berührungskegeln in bezug auf die 3 gegebenen Kugeln  $a, b, c$ . Wir setzen daher in (17) und (18)  $\varrho_i = \varrho_{i+2}$  und berechnen  $\varrho_{i+1} = r_{1,2}$ . Man findet

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \pm 2 \sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}, \quad (23)$$

folglich

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}, \quad (24)$$

in Worten: Die Radien  $r_1$  und  $r_2$  besitzen dasselbe harmonische Mittel wie die Radien einer beliebigen Kette von Berührungskegeln in bezug auf die 3 gegebenen Kugeln.

Unter Benutzung von (18) erhält man noch die folgende Beziehung:

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 &= \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{\varrho_5} - \frac{1}{m} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{\varrho_4} - \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{\varrho_6} - \frac{1}{m} \right)^2 \right\} = \frac{2(a+b+c)}{abc}, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

und es gilt auch

$$\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{m} \right)^2 + \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{m} \right)^2 \right\} = \frac{4(a+b+c)}{abc} - 2\mu^2.$$

Diese Formeln zeigen, dass die beiden Tripel  $1/\varrho_1, 1/\varrho_3, 1/\varrho_5$  und  $1/\varrho_2, 1/\varrho_4, 1/\varrho_6$  denselben mittleren Fehler besitzen wie die reziproken Werte aller 6 Radien und dass auch

$$\mu \left( \frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \dots, \frac{1}{\varrho_6} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2} \right) \quad (26)$$

gilt. Die Formeln (17) und (18) gestatten, aus  $a, b, c$  und beliebig gewähltem  $\varrho_1$  die übrigen Radien  $\varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_6$  einer Kette von Berührungskegeln zu berechnen; aber umgekehrt können auch aus 3 Radien einer Kette von Berührungskegeln zunächst die 3 andern, und dann zu beliebig gewähltem  $a$  die zugehörigen Werte von  $b$  und  $c$  berechnet werden. Daher gehören auch zu einer bestimmten 6er-Reihe unbegrenzt viele 3er-Reihen von Berührungskegeln. Aus (22) und (25) folgen für je eine solche 6er und 3er-Reihe die Beziehungen

$$3m_3 = m_6; \quad \frac{\mu_3^2}{m_3^2} + \frac{3\mu_6^2}{m_6^2} = 2. \quad (27)$$

Dabei bedeuten  $m_3$  bzw.  $m_6$  die arithmetischen Mittel der reziproken Werte der Kugelradien der beiden Reihen und  $\mu_3$  bzw.  $\mu_6$  die mittleren Fehler dieser Werte.

A. AEPPLI, Zürich

## Aufgaben

**Aufgabe 333.** Es sei  $A = (a_{ik})$  die Stifel-Pascalsche Dreiecksmatrix, also  $a_{ik} = \binom{i}{k}$  für  $i, k = 0, 1, 2, \dots$ . Man beweise für  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  die Formel

$$A^n = (a_{ik} n^{i-k}).$$

J. PAASCHE, München

*Lösung:* Die Richtigkeit der Formel ist für  $n = 1$  evident. Wir nehmen nun an, dass die Formel  $A^n = (a_{ik} n^{i-k})$  für  $n$  bewiesen sei, und zeigen, dass sie dann auch für  $n + 1$  gilt.