

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 6  
  
**Rubrik:** Literaturüberschau

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

3. Bestimme  $a$  so, dass die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - (3 + a)x^2 + (2 + 3a)x - 2a = 0$$

eine arithmetische Reihe bilden.

►  $a = 0; 3; 3/2$ .

4. Löse die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix} = 0$$

►  $x = 0; 0; a^2 + b^2 + c^2$ .

5. Das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, deren mittlere eine Quadratzahl ist, enthält stets den Faktor 60.

## Literaturüberschau

F. und R. NEVANLINNA: *Absolute Analysis*

Mit 4 Abbildungen, 259 Seiten, DM 39.-. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 102, Springer-Verlag, Berlin 1959

Was ist *absolute Analysis*? Man kann bei Funktionen von mehreren reellen Variablen zwei Begriffe von Differenzierbarkeit unterscheiden. Existiert für die Funktion  $f$  der Variablen  $x_1$  und  $x_2$  der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \lambda h_1, x_2 + \lambda h_2) - f(x_1, x_2)}{\lambda}$$

für alle  $h_1$  und  $h_2$ , so heisst  $f$  «schwach differenzierbar» in  $(x_1, x_2)$ ; der Grenzwert ist das schwache Differential  $\partial f(x_1, x_2; h_1, h_2)$ ; für  $(h_1, h_2) = (1, 0)$  bzw.  $(0, 1)$  ist es die partielle Ableitung nach  $x_1$  bzw.  $x_2$ , für  $(h_1, h_2) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  ist es die Richtungsableitung. Dieser Begriff ist so schwach, dass aus ihm weder die Stetigkeit von  $f$  an der Stelle  $(x_1, x_2)$  folgt, noch die Linearität von  $\partial f$  in bezug auf  $h_1$  und  $h_2$ . Die «starke Differenzierbarkeit» dagegen bringt die (schon bei einer Variablen so) wichtige Idee der «lokalen Linearisierbarkeit» zum Ausdruck: es gibt eine Linearform  $a_1 h_1 + a_2 h_2$ , so dass

$$(f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)) - (a_1 h_1 + a_2 h_2) \text{ für } h_1, h_2 \rightarrow 0$$

von kleinerer Grössenordnung als  $|h_1| + |h_2|$  ist. Auf Grund der Kettenregel ist das totale Differential  $df = a_1 h_1 + a_2 h_2$  gegenüber Variablentransformationen invariant und die  $a_1, a_2$  verhalten sich wie die kovarianten Komponenten eines Vektors. Denkt man sich daher das Paar  $(x_1, x_2)$  als die Koordinaten eines Punktes im 2dimensionalen Raum, so ist klar, dass die Funktion  $f$ , das totale Differential  $df$  und der durch  $(a_1, a_2)$  bestimmte Vektor geometrische Grössen sind, also von der Wahl der Koordinaten unabhängig und somit etwas «Absolutes» sind, währenddem in der obigen Schreibweise sowohl die Koordinatenwahl als auch die Dimension zum Ausdruck kommt. Es ist auch klar, dass für konkrete (vor allem rechnerische) Aufgaben nicht nur die Dimension einen bestimmten Wert hat, sondern auch ein bestimmtes Koordinatensystem benützt werden muss. Dagegen ist es nicht nur eine Angelegenheit der Ästhetik oder der Verkürzung der Schreibweise, sondern vor allem eine Frage letzter gedanklicher Durchdringung und Konzentration, die in der Forderung nach einer koordinaten- und dimensionsfreien Darstellung der Analysis zum Ausdruck kommt. Gebieterisch wurde diese Forderung infolge der wachsenden Bedeutung,

welche die Funktionen unendlich vieler Variablen und die abstrakten linearen Räume in der Funktionalanalysis erlangt haben. Schon FRÉCHET hat die Anwendbarkeit der oben erwähnten «starken Differenzierbarkeit» in der Funktionalanalysis betont, und es wurde dann seit Ende der zwanziger Jahre durch eine Reihe von Forschern (vor allem amerikanischen) eine dimensions- und koordinatenfreie, sogenannte «general» Analysis entwickelt. Hierbei ist vor allem der unendlich-dimensionale Fall mit all seinen zusätzlichen Schwierigkeiten im Auge behalten worden, währenddem die klassische Infinitesimalrechnung (endlich viele Funktionen endlich vieler Variablen) mit ihren einfacheren Methoden und weiterführenden Resultaten bei dieser Elimination von Koordinaten und Dimensionen weniger beachtet wurde. Dies haben die Verfasser durch das vorliegende Buch nachgeholt, indem sie sich konsequent auf Abbildungen (Funktionen) endlichdimensionaler Vektorräume aufeinander beschränkt und somit in «general Analysis» den ersten Term durch «absolut» ersetzt haben. Dabei ist die Darstellung so allgemein gehalten, dass es dem Leser nicht schwerfallen wird, den allgemeinen Fall des Banachschen Raumes vielerorts mitzunehmen. Nach einer kurzen Einführung in die lineare Algebra folgt die Differential-, dann die Integralrechnung und schliesslich die Anwendung auf Differentialgleichungen und Differentialgeometrie. Das wohldurchdachte und sorgfältig geschriebene Buch verspricht die wünschbare Verbreitung der in ihm vertretenen Ideen.

A. PFLUGER

ROMAN SIKORSKI:

*Boolean Algebras*

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

176 Seiten, DM 39.60. Neue Folge, Heft 25

Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960

Die Booleschen Algebren haben ihren Ursprung in der Untersuchung der Teilmengen einer Menge  $M$ : Sind  $A, B$  solche Teilmengen, so sind es auch die Vereinigung  $A \cup B$ , der Durchschnitt  $A \cap B$  und das Komplement  $-A$  von  $A$  in  $M$ . Zwischen den aus Vereinigung, Durchschnitt und Komplement gebildeten Verknüpfungen bestehen mannigfache Identitäten, wie etwa ein kommutatives Gesetz  $A \cup B = B \cup A$ , ein distributives Gesetz  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , eine Regel von DE MORGAN  $-(A \cup B) = -A \cap -B$ . Es zeigt sich, dass unter diesen unendlich vielen Identitäten endlich viele so gefunden werden können, dass jede Identität eine Konsequenz dieser endlich vielen ist – so wie etwa  $a + (b + c) = (c + a) + b$  aus assoziativem und kommutativem Gesetz der Addition folgt. Eine solche endliche Gesamtheit  $\Gamma$  von Identitäten gibt Anlass zu einem Axiomensystem für Boolesche Algebren: Eine Boolesche Algebra  $\mathfrak{B}$  ist eine (nicht leere) Gesamtheit von Elementen, für welche zweistellige Operationen « $\cup$ », « $\cap$ » und eine einstellige Operation « $-$ », so definiert sind, dass für beliebige Elemente die Identitäten aus  $\Gamma$  erfüllt sind – nach dem obigen gelten dann von selbst alle Identitäten von Teilmengen, und die Gesamtheit aller Teilmengen einer Menge  $M$  ist eine Boolesche Algebra. Die Begriffe *Isomorphie*, *Teilalgebra* usw. lassen sich genau wie bei Gruppen oder Ringen definieren. Satz: Jede endliche Boolesche Algebra ist isomorph der Algebra aller Teilmengen einer endlichen Menge. Für unendliche Algebren gilt dies nicht – doch gilt allgemein der folgende Darstellungssatz von STONE: Jede Boolesche Algebra ist isomorph einer Teilalgebra der Algebra aller Teilmengen einer Menge  $M$ . Diese – und natürlich viele weitere – «klassischen» Sätze der Theorie der Booleschen Algebren werden im ersten Kapitel entwickelt; das zweite Kapitel behandelt die Begriffsbildungen und Sätze, welche sich an unendliche Vereinigung und Durchschnitt knüpfen. Dieser Teil der Theorie – zu welchem der Verfasser wesentliche Beiträge geliefert hat – wird hier zum ersten Mal zusammenfassend dargestellt. Im Gegensatz etwa zur Gruppentheorie, wo unendliche Produkte ohne Stetigkeit nicht definiert werden können, kann der Begriff der unendlichen Vereinigung ganz im Rahmen der Booleschen Algebra eingeführt werden. Es wird dazu zunächst die Relation des Enthaltenseins definiert:  $A \subset B$ , genau wenn  $A \cup B = B$ . (Die zu erwartenden Eigenschaften lassen sich ohne Schwierigkeit aus den Axiomen beweisen.) Ist dann  $\mathfrak{S}$  eine Menge von Elementen der Booleschen Algebra  $\mathfrak{B}$ , so ist  $V$  genau dann die Vereinigung der Elemente von  $\mathfrak{S}$ , wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: (1) Es

ist  $S \subset V$  für alle  $S$  aus  $\mathfrak{S}(2)$ . Ist  $S \subset V'$  für alle  $S$  aus  $\mathfrak{S}$ , so ist  $V \subset V'$ . Man zeigt leicht, dass es zu einer Menge höchstens eine Vereinigung gibt und dass für endliche Mengen dieser neue Begriff der Vereinigung mit dem rekursiv definierten übereinstimmt. – In einem Anhang werden die Beziehungen zu andern Teilen der Mathematik besprochen: Masstheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Logik usw. – Es ist dem Verfasser ausgezeichnet gelungen, den Charakter eines Ergebnisberichtes mit einer lehrbuchhaften Darstellung zu verknüpfen – vom Anhang abgesehen sind alle Sätze lückenlos bewiesen. E. SPECKER

R. D. CARMICHAEL:

*The Theory of Numbers and Diophantine Analysis*

118 Seiten, \$ 1.35, Dover Publications, New York 1959

Die beiden hier zusammengebundenen Bändchen erschienen erstmals 1914 bzw. 1915. Sie stellen aber auch heute noch eine sehr lesenswerte Einführung in die elementare Zahlentheorie und in die Lehre der Diophantischen Gleichungen dar. Die Darstellung ist kurz, aber leicht verständlich. Von besonderem Wert sind die zahlreichen Übungen (ohne Lösungen). E. TROST

N. N. WOROBJOW:

*Die Fibonaccischen Zahlen*

47 Seiten mit 13 Figuren. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1954

Das Büchlein enthält zahlreiche Relationen zwischen den Fibonaccischen Zahlen, die entweder durch vollständige Induktion oder mittels der expliziten Darstellung durch die Binetsche Formel gewonnen werden. Der zahlentheoretische Teil behandelt gewisse Teilbarkeitseigenschaften sowie den Zusammenhang mit den Kettenbrüchen. Zum Schluss wird auf den Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt hingewiesen. E. TROST

K. KNOPP:

*Elemente der Funktionentheorie*

144 Seiten mit 23 Figuren. 5. Auflage. Sammlung Göschen, Band 1109. Walter de Gruyter, Berlin 1959.

K. KNOPP:

*Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II*

151 Seiten. 5. Auflage. Sammlung Göschen, Band 878. Walter de Gruyter, Berlin 1959

Die *Elemente der Funktionentheorie* geben zunächst eine Einführung in die komplexen Zahlen und in ihre geometrische Darstellung, als Anwendung folgt ein Abschnitt über Abbildungen durch lineare Funktionen. Die eigentliche Funktionentheorie beginnt mit einem grundlegenden Kapitel über Mengen, Folgen und Potenzreihen; hieran anschliessend werden die Haupteigenschaften der analytischen Funktionen herausgearbeitet. Eine ausführliche Behandlung der elementaren Funktionen bildet den letzten Abschnitt des Büchleins, über dessen Bewährung anlässlich der fünften Auflage gewiss nichts mehr gesagt werden muss.

Die *Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II* schliesst sich eng an die *Funktionentheorie II* (Sammlung Göschen, Bd. 703) desselben Verfassers an. Die Aufgaben selbst beanspruchen etwa ein Drittel des Bändchens, während die restlichen zwei Drittel den Lösungen zur Verfügung gestellt sind. Nach einigen vorbereitenden Aufgaben zum Stoff der *Funktionentheorie I* folgen Aufgaben über singuläre Stellen, über ganze und meromorphe Funktionen und über periodische Funktionen, inbegriffen elliptische Funktionen. Je ein Kapitel ist endlich der analytischen Fortsetzung, mehrdeutigen Funktionen und Riemannschen Flächen und der konformen Abbildung gewidmet. Nicht nur der Studierende, auch der Aufgabensteller wird mit Gewinn zu der reichhaltigen Sammlung greifen. CHR. BLATTER



GUIDO HOHEISEL: *Partielle Differentialgleichungen*  
4., durchgesehene Auflage. 130 Seiten, DM 3.60. Sammlung Götschen, Bd. 1003

GUIDO HOHEISEL: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*  
6., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 128 Seiten. DM 3.60  
Sammlung Götschen, Bd. 920. Verlag Walter de Gruyter & Cie., Berlin 1960

Die *Partiellen Differentialgleichungen* sind ein Wiederabdruck der dritten Auflage vom Jahre 1953, die hier in den Elementen 10, S. 94 angezeigt wurden. Der Band umfasst die Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei und  $n$  Veränderlichen, Systeme mit einer und mehr unbekannten Funktionen und die Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Die *Gewöhnlichen Differentialgleichungen* haben gegenüber der fünften Auflage von 1956 (Elemente 13, S. 21) eine tiefgehende Umgestaltung erfahren. Die fünfte Auflage war ein für einen Anfänger leicht lesbares und verständliches Büchlein mit vielen erklärenden Beispielen. In der neuen sechsten Auflage werden an den Leser höhere Anforderungen gestellt. An Stelle einer Funktion  $y = f(x)$  tritt eine Vektorfunktion

$$\mathbf{y}(x) = [y_1(x), \dots, y_m(x)] .$$

Der Schritt von der Theorie zur Praxis ist schwieriger geworden, da nunmehr die Existenztheoreme im Vordergrund stehen. Die die Theorie erläuternden Beispiele sind weitgehend in die von demselben Verfasser stammende Aufgabensammlung verwiesen worden (G. HOHEISEL: Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Sammlung Götschen Bd. 1059). Man kann sich fragen, ob es Aufgabe der Götschenbändchen sein kann, über eine erste Einführung hinauszugehen, den Stoff auf kleinstem Raum zu konzentrieren und überall grösste Allgemeinheit anzustreben. Behandelt werden die Differentialgleichungen 1. Ordnung  $F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0$ , die linearen Differentialgleichungen, Randwertaufgaben und das Oszillationsproblem. Beide Bändchen sind sehr sorgfältig redigiert.

P. BUCHNER

MAX JEGER: *Konstruktive Abbildungsgeometrie*  
Ein Beitrag zur Neuorientierung des Geometrie-Unterrichts auf der Mittelschule. 80 Seiten mit 74 Figuren.  
Fr. 9.80. Verlag Räber & Cie., Luzern 1959

Es handelt sich um das erste Heft einer neuen Reihe von *Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichtes*. Um unsern Lesern das gesteckte Ziel zur Kenntnis zu bringen, zitieren wir das Vorwort der Herausgeber M. RUEFF, M. JEGER und R. INEICHEN:

«Das moderne mathematische Denken und die raschen Fortschritte in gewissen Gebieten der mathematischen Wissenschaften sind nicht ohne Einfluss auf den Mathematik-Unterricht an den höheren Schulen geblieben. Die dadurch bedingte Neugestaltung des Unterrichtes spielt sich unseres Erachtens auf zwei Ebenen ab; einerseits muss mehr und mehr auf traditionsbelastete Teile des Unterrichtsstoffes verzichtet werden und andererseits müssen im Sinne einer methodischen Neusichtung des Stoffes die Akzente neugesetzt werden. Neben andern gleichgearteten Publikationen möchten die Hefte der vorliegenden Schriftenreihe einige neue, für den Unterricht bedeutungsvolle Gesichtspunkte in leicht fasslicher Form herauschälen und zudem durch kurze Einzeldarstellungen die eine und andere Lücke in der Unterrichts-Literatur überbrücken helfen. Die Hefte sind als methodische Handreichungen, gelegentlich auch als Beiträge zur Benutzung in Arbeitsgruppen oder im Klassenunterricht gedacht. Sie erscheinen in zwangloser Folge.»

Das vorliegende Heft behandelt die axiale Symmetrie, die Translation, die Rotation, die perspektive Ähnlichkeit und die perspektive Affinität in der ebenen Geometrie, erläutert deren wichtigste Eigenschaften und führt an geeigneten Stellen einige damit verbundene einfachste Gruppen vor. Für den Lehrer besonders wertvoll sind die 67 Aufgaben, zu deren natürlichen Lösung eine der besprochenen Abbildungen herangezogen wird. Die Darstellung ist sorgfältig gefasst, die Figuren sind klar gezeichnet. Die Arbeit kann dem Lehrer mancherlei Anregungen dazu bieten, in seinen Geometrieunterricht den Abbildungsvorgang in den Vordergrund zu rücken.

L. LOCHER-ERNST