**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 15 (1960)

**Heft:** 6

**Rubrik:** Aufgaben

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und $u(x, y)$ und $v(x, y)$ die Laplacesche Gleichung. Da $p(x, y)$ in $G$ positiv ist, ist daher $\log f'(z)$ und damit auch $f'(z)$ eine in $G$ reguläre Funktion. Es ist

$$\operatorname{Re} \log f'(z) = \log | f'(z) | = -\frac{1}{4} \log p(x, y) ,$$

und $f(z)$ vermittelt eine konforme Abbildung von $G$ auf ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet; hieraus folgt schon die Hinlänglichkeit der Bedingung (1).

*b) Notwendigkeit:* Nehmen wir an, es gibt zu $G$ ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet $G'$ derart, dass den infinitesimal kleinen regulären Sechsecken mit demselben Trägheitsmoment in $G$ reguläre Sechsecke in $G'$ entsprechen. Man erkennt sofort, dass dies äquivalent mit der Existenz einer konformen Abbildung von $G$ auf $G'$ ist. Eine solche kann aber nur durch in $G$ analytische Funktionen geleistet werden; das lineare «Vergrösserungsmass» ist bekanntlich gleich dem absoluten Betrag der Ableitung im betreffenden Punkt. Eine solche abbildende Funktion sei mit $f(z)$ bezeichnet. Dann darf

$$[p(x, y)]^{-\frac{1}{4}} = | f'(z) | \qquad (z = x + i y)$$

gesetzt werden. Wegen der Konformität muss in $G$ $f'(z) \neq 0$ sein. Damit ist auch die Notwendigkeit von (1) bewiesen.

Zum Schluss seien einige Folgerungen erwähnt.

Aus dem Maximumprinzip der Funktionentheorie ergibt sich, dass sich die Niveaulinien $p(x, y) = K$ nicht schliessen können. Daher ist es unmöglich, eine Figur mit lauter «fast regulären» Sechsecken von denselben Trägheitsmomenten zu zeichnen, wenn die Belegungsfunktion radial abnimmt. Dies wird aber möglich, wenn wir $G$ längs einer Linie aufschneiden und auf die Konformität längs des Schnittes verzichten (Figur).

A. Heppes und P. Szüsz (Budapest)

# Aufgaben

**Aufgabe 361.** Gegeben sei ein Dreieck $ABC$ mit den Seiten $a, b, c$ und dem Höhenschnittpunkt $H$. Wir bezeichnen seine Höhenfusspunkte mit $H_a$, $H_b$, $H_c$, die Fusspunkte der aus diesen Punkten auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit $H_{ab}$, $H_{ac}$, $H_{bc}$, $H_{ba}$, $H_{ca}$, $H_{cb}$ und die 12 Fusspunkte der aus diesen Punkten erneut auf die Dreiecksseiten gefällten Lote mit $H_{pqr}$. Hier gibt $H_{pq}$ ($p, q = a, b, c$) jeweils den Ausgangspunkt an; $r$ bezeichnet die Dreiecksseite, auf die das Lot gefällt wurde. Es soll gezeigt werden:

1. *Die Quadrupel $H_{cab}$ $H_{cba}$ $H_{aba}$ $H_{bab}$ usw. sind jeweils die Ecken von Kreisvierecken, deren Mittelpunkte $A^*$, $B^*$, $C^*$ seien.*
2. *Die Höhen des Dreiecks $A^*B^*C^*$ gehen bzw. durch die Ausgangspunkte $A$, $B$, $C$.*

Karl Wanka, Wien

*Lösung:* Aus den Streckenverhältnissen

$$\overline{CH_{ab}} : \overline{CH_{ba}} = b : a \text{ und } \overline{CH_{cb}} : \overline{CH_{ca}} = a : b$$

folgt $\overline{CH_{ab}} \cdot \overline{CH_{cb}} = \overline{CH_{ba}} \cdot \overline{CH_{ca}}$. Die Punkte $H_{ab}$, $H_{cb}$, $H_{ca}$, $H_{ba}$ liegen demnach auf einem Kreis. Daraus ergibt sich, dass auch die durch Normalprojektion dieser Punkte auf $a$ bzw. $b$ hervorgehenden Punkte $H_{aba}$, $H_{cba}$, $H_{cab}$, $H_{bab}$ Ecken eines Kreisvierecks sind. Die 1. Behauptung ist damit bereits bewiesen. Da auch von den Punktequadrupeln $H_{ca}H_{ba}H_{bc}H_{ac}$ und $H_{bc}H_{ac}H_{ab}H_{cb}$ jedes für sich einem Kreis angehört und da auch die Potenzlinien der drei Kreise das Dreiseit $abc$ bilden, also nicht durch einen Punkt gehen, liegen alle sechs Punkte $H_{pq}$ auf einem und demselben Kreis. Sein Mittelpunkt sei $M$; die Fusspunkte der aus $M$ auf die Dreiecksseiten $a, b, c$ gefällten Lote seien $M_a$, $M_b$, $M_c$. Nun halbiert beispielsweise $M_a$ die Kreissehne $H_{ca}H_{ba}$, woraus hervorgeht, dass die von $M_a$ aus auf $b$ gefällte Normale die Symmetrale der Strecke $\overline{H_{cab}H_{bab}}$ ist. $C^*$ ergibt sich somit als Schnittpunkt der von $M_a$ und $M_b$ auf $b$ bzw. $a$ gefällten Lote.

In entsprechender Weise werden die Punkte $A^*$ und $B^*$ gefunden. Das Sechseck $A^*M_cB^*M_aC^*M_b$ setzt sich aus den drei Parallelogrammen $C^*M_bMM_a$ usw. zusammen;

es hat daher parallele und gleichlange Gegenseiten. Daraus ergibt sich, dass zum Beispiel auch $A^*B^*$ und $M_bM_a$ zueinander parallel sind. Da $C^*$ im Dreieck $CM_bM_a$ Höhenschnittpunkt ist, muss $CC^*$ zu $M_bM_a$ und damit auch zu $A^*B^*$ normal sein, womit die 2. Behauptung ebenfalls bestätigt ist. K. GRÜN, Linz/Donau

J. LANGR (Prag) weist darauf hin, dass die Transversalen $\overline{H_{ab}H_{ac}}$, $\overline{H_{ba}H_{bc}}$ und $\overline{H_{ca}H_{cb}}$ alle dieselbe Länge $F/r$ haben, wobei $F$ den Flächeninhalt und $r$ den Umkreisradius des Dreiecks $ABC$ bedeutet.

Weitere Lösungen sandten J. E. HOFMANN (Ichenhausen, Deutschland), R. LAUFFER (Graz), R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England). Teillösungen gingen ein von A. KOLBER (Rehovoth, Israel) und H. FRISCHKNECHT (Berneck).

**Aufgabe 362.** Prove that the equation

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

has no solution in non-negative integers $x$, $y$. A. MAKOWSKI, Warsaw/Poland

*1. Lösung:* $(x, y)$ sei eine ganzzahlige Lösung von

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3 . \tag{1}$$

Wenn $x \geqq 0$, so ist

$$(2x+2)^3 < (x+2)^4 - x^4 < (2x+3)^3 ,$$

und aus (1) folgt $2x + 2 < y < 2x + 3$. Da dies unmöglich ist, muss $x$ negativ sein. Da mit $(x, y)$ auch $(-x-2, -y)$ eine Lösung von (1) ist, ergibt sich $x > -2$. $(-1, 0)$ ist also die einzige ganzzahlige Lösung von (1). A. BAGER, Hjørring

*2. Lösung:* Durch Zerlegen in Faktoren erhält man

$$(x+1)\,[(x+1)^2 + 1] = (y/2)^3 .$$

Die beiden Faktoren links sind teilerfremd und müssen also beide Kubikzahlen sein. Somit sind auch $(x+1)^2$ und $(x+1)^2 + 1$ Kubikzahlen. 0 und 1 sind aber die einzigen Kubikzahlen $\geqq 0$ mit der Differenz 1. H. KUMMER, Burgdorf

Weitere Lösungen sandten J. BERKES (Szeged), C. BLATTER (Basel), B. BOLLOBÁS (Dunaharaszti, Ungarn), J. FIEDLER (Regensburg), S. GUBER (München), E. HERRMANN (Porz am Rhein), V. HORAK (Brno, CSR), W. JÄNICHEN (Berlin), A. KOLBER (Rehovoth, Israel), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland), W. SCHÖNIGER (Zürich), R. STEUERWALD† (Alzing, Deutschland), H. VOGLER (Wien).

**Aufgabe 363.** Es sind bekannt der Umkugelradius $R$, der Inkugelradius $r$ und der Winkel $\alpha$ zweier Nachbarkanten eines gleichflächigen Tetraeders. Man konstruiere das Tetraeder. J. SCHOPP, Budapest

*Lösung:* Aus der Flächengleichheit der Tetraederflächen folgt deren Kongruenz. Infolgedessen ist der Umkugelmittelpunkt $M$ des Tetraeders der Schnittpunkt der Flächennormalen in den Umkreismittelpunkten $U_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ der Tetraederflächen, und $M$ ist damit notwendigerweise auch Inkugelmittelpunkt[1]). Für den Umkreisradius $x$ einer Tetraederfläche gilt also $x^2 = R^2 - r^2$.

Aus der Kongruenz der Tetraederflächen folgt weiterhin, dass $M$ auch der Schwerpunkt des Tetraeders ist[1]). Die Ecktransversale durch $M$ schneidet also die zugehörige Gegenfläche in deren Schwerpunkt $S_i$ und es ist $\overline{S_iM} = R/3$. Daher gilt für den Abstand $y$ des Flächenschwerpunktes $S_i$ vom zugehörigen Umkreismittelpunkt $U_i$ die Beziehung

$$y^2 = \overline{S_iU_i}^2 = \overline{S_iM}^2 - \overline{MU_i}^2 = (R^2 - 9r^2)/9.$$

Eine beliebige Tetraederfläche $ABC$ ist demnach aus dem Radius $x$, der Strecke $\overline{SU} = y$ und dem Winkel $\alpha$ konstruierbar. Man zeichne dazu im Kreis mit dem Mittelpunkt $U$ und

[1]) Vergleiche auch Aufgabe Nr. 221. Lösung El. Math. *10*, 132 (1955).

dem Radius $x$ die Sehne $BC$, die zum Zentriwinkel $2\alpha$ gehört. $Z$ sei der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Der Punkt $U^*$ auf $ZU$ sei durch $\overline{ZU^*} = 3\overline{ZU}$, $\overline{UU^*} = 2\overline{ZU}$ bestimmt. Der Kreis um $U^*$ mit Radius $3y$ schneidet den Kreis um $U$ in $A$. Die Parallelen durch die Eckpunkte $A$, $B$, $C$ zu den entsprechenden Gegenseiten liefern die drei übrigen Tetraederflächen in netzmässiger Anordnung.

*Determination:* Die Konstruktion ist eindeutig lösbar, wenn

$$r \leqq R/3 \text{ und } |1 - 2\cos\alpha| \leqq \sqrt{\frac{R^2 - 9r^2}{R^2 - r^2}} .$$

O. Reutter, Ochsenhausen, Deutschland

Herr F. Leuenberger (Zuoz) bemerkt, dass ein gleichflächiges Tetraeder mit Höhenschnittpunkt regulär ist. Das ist der Fall $R = 3r$. Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass nach der obigen Determination $\cos\alpha$ zwischen 0 und 1 liegt. Das bestätigt die bekannte Tatsache, dass die Seitenflächen eines gleichflächigen Tetraeders immer spitzwinklige Dreiecke sind.

Weitere Lösungen sandten R. Lauffer (Graz) und F. Leuenberger (Zuoz).

**Aufgabe 364.** Man bestimme die Nullstellen des Polynoms

$$P_k(x) = \sum_{n=0} \binom{k-n}{n} x^{k-2n} .$$

R. Wagner, Karlsruhe

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es ist

$$P_0(x) = 1 \; ; \quad P_1(x) = x \; ; \quad P_k(x) = x\, P_{k-1}(x) + P_{k-2}(x) \;\; (k \geqslant 2) .$$

Setzt man $x = 2i\cos y$, so befriedigt

$$Q_k(x) = \frac{i^k}{\sin y} \sin(k+1)y$$

wegen

$$\sin(k+1)y = 2\cos y \sin ky - \sin(k-1)y$$

dieselben Anfangsbedingungen und dieselbe Funktionalgleichung wie $P_k(x)$. Also ist $P_k(x) = Q_k(x)$, und die gesuchten Nullstellen sind

$$x = 2i\cos\frac{p\pi}{k+1} \qquad (p = 1, \ldots, k) .$$

Lösungen gingen ein von J. Fiedler (Regensburg), E. Herrmann (Porz am Rhein) und W. Jänichen (Berlin).

**Aufgabe 365.** Es sei $n = 1, 2, 3, \ldots$, $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Man beweise die Abschätzung

$$\frac{n}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{s - a_\nu}} \leqq n - 1 \leqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{s - a_\nu}{a_\nu}}{n} ,$$

die nur im Falle $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ Gleichheit ergibt.

I. Paasche, München

*1. Lösung:* Es ist

$$\sum_1^n \frac{a_\nu}{s - a_\nu} = s \sum_1^n \frac{1}{s - a_\nu} - n \text{ und } \sum_1^n \frac{s - a_\nu}{a_\nu} = s \sum_1^n \frac{1}{a_\nu} - n .$$

Die Ungleichung zwischen harmonischem und arithmetischem Mittel liefert

$$\frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{a_\nu}} \leqq \frac{s}{n}, \quad \text{also} \quad \sum_1^n \frac{1}{a_\nu} \geqq \frac{n^2}{s};$$

analog ist

$$\sum_1^n \frac{1}{s - a_\nu} \geqq \frac{n^2}{(n-1)\,s}.$$

Einsetzen dieser Abschätzungen (Gleichheit genau für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$) zeigt die Richtigkeit der Ungleichung. H. KUMMER, Burgdorf

*2. Lösung:* Ohne Beschränkung der Annahme sei $s = \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Die Funktionen $f_1(x) = x/(1-x)$ und $f_2(x) = (1-x)/x$ sind für $0 < x < 1$ eigentlich konvex. Bekanntlich gilt somit[1])

$$f_k\left(\frac{1}{n}\right) = f_k\left(\frac{s}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_k(x_i), \qquad (k = 1, 2)$$

mit Gleichheit nur für $x_i = 1/n$ $(1 \leqq i \leqq n)$. Hieraus folgen die verlangten Ungleichungen sofort. C. BLATTER, Basel

Weitere Lösungen sandten J. BERKES (Szeged), J. C. BINZ (Bern), B. BOLLOBÁS (Dunaharaszti/Ungarn), M. DOSTÁL (Prag), J. FIEDLER (Regensburg), E. HERRMANN (Porz am Rhein), W. JÄNICHEN (Berlin), M. KORECZ (Budapest), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland), J. SCHOPP (Budapest), R. STEUERWALD† (Alzing/Deutschland), H. VOGLER (Wien), H. ZEITLER (Weiden/Oberpfalz).

**Aufgabe 366.** An eine Parabel werden drei beliebige Tangenten gelegt. Man beweise, dass das Produkt der Krümmungsradien in den Berührungspunkten gleich dem 64fachen Kubus des Umkreisradius des aus den Tangenten gebildeten Dreiecks ist.

A. CZWALINA, Berlin

*Lösung:* Die Parabelgleichung sei $2y = x^2$, der Krümmungsradius also $\varrho = (1 + x^2)^{3/2}$. Die Berührungspunkte der drei Tangenten seien $P_i(x_i, y_i)$, die Ecken des Tangentendreiecks $Q_i(\xi_i, \eta_i)$. Man erhält zum Beispiel $\xi_3 = (x_1 + x_2)/2$, $\eta_3 = x_1 x_2/2$. Der Umkreisradius des Dreiecks ergibt sich nach der Formel $4r = a\,b\,c/F$. Dabei ist etwa

$$c = \overline{Q_1 Q_2} = \frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid \sqrt{1 + x_3^2}$$

und

$$F = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \\ x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \mid (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \mid .$$

Also gilt

$$(4r)^3 = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 .$$

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Ungefähr dieselbe Lösung sandten W. JÄNICHEN (Berlin) und H. MEILI (Winterthur). Weitere Lösungen gingen ein von J. BASILE (Brüssel), B. BOLLOBÁS (Dunaharaszti/Ungarn), H. FRISCHKNECHT (Berneck), G. GEISE (Dresden), I. PAASCHE (München), E. ROTHMUND (Zürich), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach), CH. VUILLE (La Sagne).

---

[1]) Vergleiche PÓLYA-SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, S. 52.

## Neue Aufgaben

*391.* Dans un triangle cyclique $ABC$:

(1) Les hauteurs sont concourantes.

(2) Trois céviennes $AD$, $BE$, $CF$ sont concourantes, ou les pieds $D$, $E$, $F$ se trouvent sur la même transversale, si

$$\frac{\sin DAB}{\sin DAC} \cdot \frac{\sin EBC}{\sin EBA} \cdot \frac{\sin FCA}{\sin FCB} = \pm 1 .$$

Donc, les bissectrices intérieures sont concourantes, les pieds des bissectrices extérieures sont concycliques etc.

*Note:* Nous appelons triangle cyclique $ABC$ la figure plane formée par trois circonférences $AB$, $BC$, $CA$. Deux «côtés» $AB$ et $CA$ se coupent sous un angle $BAC$ en deux points $A_1$ et $A_2$: le sommet $A$. Une circonférence qui passe par un sommet et coupe orthogonalement le côté opposé est une hauteur, et par des extensions analogues on peut définir les bissectrices etc. G. N. VLAHAVAS, London

*392.* If $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ and for a positive $b$ the inequality

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \right| \leqq \frac{e^{-bx^2}}{1 + 4\pi^2 x^2} \qquad (1)$$

holds on the real $x$-axis, then for all positive integers $k$ the inequality

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^k\, e^{-ixt}\, dt \right| \leqq \frac{e^{-bx^2/k}}{1 + 4\pi^2 x^2} \qquad (2)$$

holds on the whole real axis. P. TURÁN, Budapest

*393.* Wieviele verschiedene quadratische Reste und Nichtreste werden durch den Binomialkoeffizienten $\binom{a}{2}$ dargestellt, wenn für $a$ die mod $p$ verschiedenen Restklassen $2, 3, \ldots, p-1$ der Primzahl $p$ eingesetzt werden? W. JÄNICHEN, Berlin

*394.* Montrer que dans l'espace limité par une couronne régulière formée de neuf cercles égaux tangents deux à deux, on peut placer exactement deux autres cercles égaux aux précédents. CH. VUILLE, La Sagne

# Aufgaben für die Schule

**Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, $x$-Achse nach rechts, $y$-Achse nach vorn, $z$-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.**

1. Das Polynom $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1$ enthält den Faktor $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

seien $x_1, x_2, x_3$. Berechne $X = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2$.

▶ $X = q^2 - 2pr$.

3. Bestimme $a$ so, dass die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - (3 + a)\, x^2 + (2 + 3\, a)\, x - 2\, a = 0$$

eine arithmetische Reihe bilden.

▶ $a = 0;\ 3;\ 3/2.$

4. Löse die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & a\,b & a\,c \\ b\,a & b^2 - x & b\,c \\ c\,a & c\,b & c^2 - x \end{vmatrix} = 0$$

▶ $x = 0;\ 0;\ a^2 + b^2 + c^2.$

5. Das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, deren mittlere eine Quadratzahl ist, enthält stets den Faktor 60.

# Literaturüberschau

F. und R. NEVANLINNA: *Absolute Analysis*

Mit 4 Abbildungen, 259 Seiten, DM 39.–. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 102, Springer-Verlag, Berlin 1959

Was ist *absolute Analysis*? Man kann bei Funktionen von mehreren reellen Variabeln zwei Begriffe von Differenzierbarkeit unterscheiden. Existiert für die Funktion $f$ der Variabeln $x_1$ und $x_2$ der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f\,(x_1 + \lambda h_1,\, x_2 + \lambda h_2) - f(x_1,\, x_2)}{\lambda}$$

für alle $h_1$ und $h_2$, so heisst $f$ «schwach differenzierbar» in $(x_1, x_2)$; der Grenzwert ist das schwache Differential $\partial\, f\,(x_1, x_2;\, h_1, h_2)$; für $(h_1, h_2) = (1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ ist es die partielle Ableitung nach $x_1$ bzw. $x_2$, für $(h_1, h_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ist es die Richtungsableitung. Dieser Begriff ist so schwach, dass aus ihm weder die Stetigkeit von $f$ an der Stelle $(x_1, x_2)$ folgt, noch die Linearität von $\partial f$ in bezug auf $h_1$ und $h_2$. Die «starke Differenzierbarkeit» dagegen bringt die (schon bei einer Variablen so) wichtige Idee der «lokalen Linearisierbarkeit» zum Ausdruck: es gibt eine Linearform $a_1 h_1 + a_2 h_2$, so dass

$$(f\,(x_1 + h_1,\, x_2 + h_2) - f(x_1,\, x_2)) - (a_1 h_1 + a_2 h_2) \text{ für } h_1,\, h_2 \to 0$$

von kleinerer Grössenordnung als $|\, h_1 \,| + |\, h_2 \,|$ ist. Auf Grund der Kettenregel ist das totale Differential $df = a_1 h_1 + a_2 h_2$ gegenüber Variablentransformationen invariant und die $a_1$, $a_2$ verhalten sich wie die kovarianten Komponenten eines Vektors. Denkt man sich daher das Paar $(x_1, x_2)$ als die Koordinaten eines Punktes im 2dimensionalen Raum, so ist klar, dass die Funktion $f$, das totale Differential $df$ und der durch $(a_1, a_2)$ bestimmte Vektor geometrische Grössen sind, also von der Wahl der Koordinaten unabhängig und somit etwas «Absolutes» sind, währenddem in der obigen Schreibweise sowohl die Koordinatenwahl als auch die Dimension zum Ausdruck kommt. Es ist auch klar, dass für konkrete (vor allem rechnerische) Aufgaben nicht nur die Dimension einen bestimmten Wert hat, sondern auch ein bestimmtes Koordinatensystem benützt werden muss. Dagegen ist es nicht nur eine Angelegenheit der Ästhetik oder der Verkürzung der Schreibweise, sondern vor allem eine Frage letzter gedanklicher Durchdringung und Konzentration, die in der Forderung nach einer koordinaten- und dimensionsfreien Darstellung der Analysis zum Ausdruck kommt. Gebieterisch wurde diese Forderung infolge der wachsenden Bedeutung,