

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

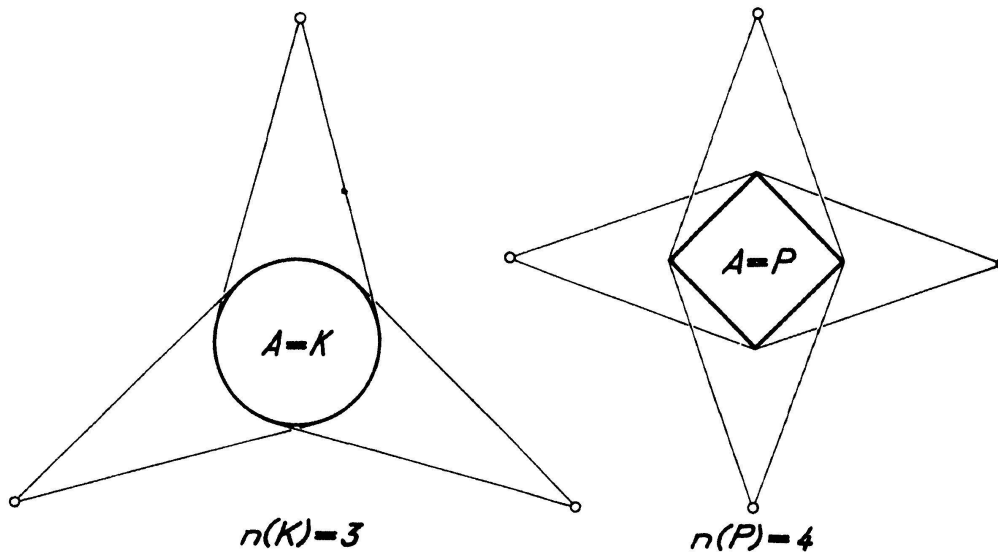
### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

einem Punkt  $p_i$  aus vollsichtbar. Vergleiche hierzu die sich auf den ebenen Fall  $k = 2$  beziehenden Figuren.



Eine nun naheliegende Frage ist die nach dem maximalen und minimalen Wert, den die Zahlen  $n(A)$  für die verschieden gestalteten konvexen Körper  $A$  annehmen. Die in diesem Sinn extremalen Körper sind diejenigen, deren Randflächen am schlechtesten und am besten von aussen überblickbar sind. Bezeichnet  $K$  eine Kugel und  $P$  ein Parallelotop, so gilt einerseits

$$n(K) = k + 1 \tag{a}$$

und andererseits

$$n(P) = 2^k . \tag{b}$$

Beide Resultate lassen sich mit einfachen elementaren Überlegungen gewinnen. Vermutlich ist nun  $K$  ein am besten und  $P$  ein am schlechtesten von aussen überblickbarer Körper, das heisst, dass die Ungleichung

$$k + 1 \leq n(A) \leq 2^k \tag{c}$$

gilt, wo links Gleichheit für die Kugel und rechts für Parallelotope besteht. Das hier vorliegende ungelöste Problem lautet also: *Ist es zutreffend, dass für die kleinste Zahl  $n(A)$  der im Äussern eines beliebigen  $k$ -dimensionalen eigentlich konvexen Körpers  $A$  zur vollen Überblickung der Randfläche von  $A$  wählbaren Blickpunkte die Ungleichung (c) besteht, oder gibt es Körper, die in diesem Sinne noch günstiger bzw. noch ungünstiger sind, als Kugel bzw. Parallelotop?*

H. HADWIGER

## Kleine Mitteilungen

### Umzeichnen von Perspektiven bei ungleichgeneigten Bildebenen

Es seien die Grundebene  $\gamma$  und zwei Bildebenen  $\pi_1, \pi_2$  gegeben, die sich in der Grundlinie  $g$  der Grundebene  $\gamma$  schneiden. Weiter seien die zu  $\pi_1, \pi_2$  gehörigen Augen  $O_1, O_2$  (keines von ihnen sei Fernpunkt von Normalen zu  $\gamma$ ) gegeben. (Figur, rechts, Ansicht in Richtung  $g$ ). Sei  $A$  ein beliebiger Raumpunkt,  $A^\gamma$  sein normales Bild in  $\gamma$ ,  $A_1, A_1^\gamma$  seien die ersten,  $A_2, A_2^\gamma$  die zweiten Perspektiven von  $A, A^\gamma$ . Seien weiter  $H_1, H_2$  die normalen Bilder von  $O_1, O_2$  in  $\pi_1, \pi_2$  (die sogenannten Hauptpunkte der Perspektiven). Wir drehen nun



$f_0$  geht durch  $\varphi$  und  $F_0$ . Die Perspektive  $A_0^\gamma$  ist dann auf Grund der Kollineation zwischen  $\Phi_1, \Phi_0$  der Schnittpunkt von  $f_0$  und  $CA_1^\gamma$ . Auch wenn man durch  $A^\gamma$  die Ebene  $O_1O_2A^\gamma$  legt und ihre Kernstrahlen  $k_1, k_2$ , die sich auf  $g$  in  $\kappa$  schneiden, verwendet, so ist in  $\pi: k_1 = K_1A_1^\gamma$  und  $A_0^\gamma$  liegt auf  $k_0 = K_0\kappa$ . Wenn wir ähnlich die Ebene  $O_1O_2A$  verwenden, so schneidet ihre Kerngerade in  $\pi_1, A_1K_1, g$  in  $\alpha$  und  $A_0$  ist der Schnittpunkt von  $\alpha K_0$  und  $A_0^\gamma Z_0$ .

Wählen wir noch die erste Perspektive eines Achsenkreuzes mit zueinander normalen Achsen. Die Achse  $z$  sei lotrecht, ihr Fluchtpunkt ist  $Z_1$ . Die Achsen  $x$  und  $y$  wählen wir in  $\gamma$ . Seien  $X_1, Y_1$  ihre Fluchtpunkte auf  $h_1$  ( $H_1$  ist dann das Orthozentrum vom  $\Delta X_1Y_1Z_1$ ). Zur Vereinfachung der Figur wählen wir den Ursprung des Achsenkreuzes in  $A^\gamma$ ,  $x_1 = X_1A_1^\gamma, y_1 = Y_1A_1^\gamma, z_1 = Z_1A_1^\gamma$ .  $x_1$  und  $y_1$  schneiden  $g$  in  $\xi$  und  $\eta$ . Dann ist  $x_0 = \xi A_0^\gamma, y_0 = \eta A_0^\gamma, z_0 = Z_0 A_0^\gamma$ . Die Schnittpunkte  $X_0, Y_0$  von  $x_0$  und  $y_0$  mit  $h_0$  sind die Fluchtpunkte von  $x, y$  und  $H_0$  ist das Orthozentrum von  $\Delta X_0Y_0Z_0$ .

Zwei Sonderfälle:

1.  $\pi_2$  sei zu  $\gamma$  normal. Unsere Konstruktion gestattet das Umzeichnen zweier Perspektiven mit lotrechter und geneigter Bildebene.
2.  $\pi_1 = \pi_2$  liefert das Umzeichnen nach HOHENBERG (F. HOHENBERG, *El. Math.* 10, 57-61 (1955)).

LADISLAV DRŠ (Prag)

### Über die Lagerung von Punkten auf der Kugel

Auf einer Einheitskugel sollen sukzessive die Punkte  $P_1, P_2, \dots$  gelagert werden.  $a_N$  bezeichne den kleinsten aller sphärischen Abstände von je zwei verschiedenen der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_N$ . Man kann zeigen (siehe etwa ΤÓΤΗ [1]<sup>1)</sup>), dass für grosse  $N$  der Abstand  $a_N$  im wesentlichen nicht grösser als

$$\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

sein kann. Genauer ausgedrückt: Es ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N \sqrt{N} \leq \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} = 3,80\dots \tag{1}$$

Die rechts stehende Konstante kann durch keine kleinere ersetzt werden. Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass dennoch für unendlich viele  $N$  der Minimalabstand  $a_N$  merklich kleiner als

$$\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

sein muss. Es gilt für jede Punktfolge  $P_1, P_2, \dots$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N N \leq \frac{2}{\sqrt{\log 4 - 1}} = 3,22\dots \tag{2}$$

Mit etwas mehr Aufwand liesse sich die Schranke  $2/\sqrt{\log 4 - 1}$  noch verbessern, jedoch dürfte es nicht einfach sein, die bestmögliche in (2) zulässige Konstante zu finden. Ein analoges Resultat für den Kreis anstatt der Kugel wurde erstmals von DE BRUIJN und ERDÖS [2] bewiesen (vgl. auch [3], [4], [6]). Der folgende Beweis von (2) liesse sich, ähnlich wie dies in [6] für  $n$ -dimensionale ebene Bereiche durchgeführt wurde, auf  $n$ -dimensionale Kugeln und noch allgemeinere Flächen verallgemeinern.

*Beweis:* Es sei angenommen, dass eine Zahl  $k > 2/\sqrt{\log 4 - 1}$  existiert, so dass von einem gewissen  $N$  an stets

$$a_n \sqrt{n} \geq k \quad (n \geq N) \tag{3}$$

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 134.

gilt.  $a(P_i, P_k)$  bezeichne den sphärischen Abstand zwischen  $P_i$  und  $P_k$ . Um jeden Punkt  $P_i$  mit  $i = 1, 2, \dots, 4N - 1$  werde nun eine Kugelkappe konstruiert, die aus allen Punkten  $X$  der Kugeloberfläche besteht, für die gilt

$$a(P_i, X) \leq \frac{k}{2} \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \text{falls } 0 \leq i < N \text{ ist} \quad (4)$$

und

$$a(P_i, X) \leq \frac{k}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right), \quad \text{falls } N \leq i < 4N \text{ ist.} \quad (5)$$

Man überzeugt sich sofort, dass wegen (3) je zwei dieser Kugelkappen keine gemeinsamen inneren Punkte haben. Die Oberfläche einer Kalotte mit dem Öffnungswinkel  $a$  ist

$$2\pi(1 - \cos a) = \pi a^2 + o(a^4).$$

Für die Summe der Oberflächen aller Kappen (4), (5) hat man daher

$$N \frac{\pi k^2}{4N} + \sum_{i=N}^{4N-1} \frac{\pi k^2}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 \leq 4\pi + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Ersetzt man die Summe durch das entsprechende Integral (Anwendung der Eulerschen Summenformel), so ergibt sich für  $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi k^2}{4} + \frac{\pi k^2}{4} \int_N^{4N-1} \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 dx \right) \leq 4\pi,$$

woraus man durch Integration und Durchführung des Grenzüberganges

$$\pi k^2 (\log 4 - 1) \leq 4\pi,$$

also

$$k \leq \frac{2}{\sqrt{\log 4 - 1}}$$

erhält. Dies aber widerspricht der Definition von  $k$ . (3) ist demnach nicht richtig, und es muss (2) gelten.

H. GROEMER (Corvallis, Oregon, USA)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*. Grundle. math. Wiss. LXV (Springer 1953). S. 113ff.
- [2] N. G. DE BRUIJN und P. ERDÖS, *Sequences of Points on a Circle*, Kon. Nederl. Akad. v. Wet. Proc. 52, 1, 46–49 (1949).
- [3] A. OSTROWSKI, *Eine Verschärfung des Schubfächerprinzips in einem linearen Intervall*, Arch. Math. 8, 1–10 (1957).
- [4] G. H. TOULMIN, *Subdivision of an Intervall by a Sequence of Points*, Arch. Math. 8, 158–161 (1957).
- [5] A. SCHÖNHAGE, *Zum Schubfächerprinzip im linearen Intervall*, Arch. Math. 8, 327–329 (1957).
- [6] H. GROEMER, *Über den Minimalabstand der ersten  $N$  Glieder einer unendlichen Punktfolge*, Math. Phys. 64 (im Druck).

#### Bemerkung zu einer Arbeit von L. FEJES TÓTH

STEINHAUS<sup>1)</sup> hat die Frage untersucht, wie man einen nicht notwendigerweise homogenen Körper in  $n$  Teile zerlegen soll, damit die Summe der Trägheitsmomente der Teile bezüglich ihrer Massenmittelpunkte minimal wird. FEJES TÓTH<sup>2)</sup> hat das asymptotische Verhalten

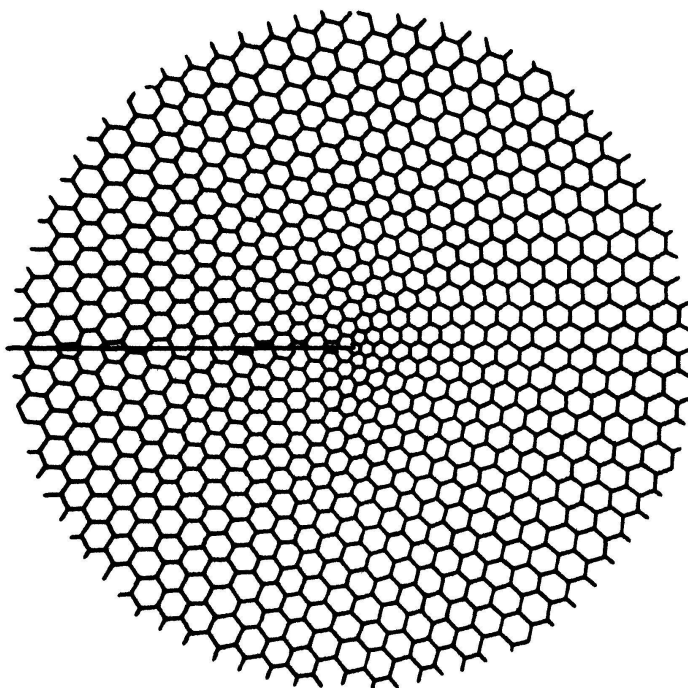
<sup>1)</sup> H. STEINHAUS, *Sur la division des corps matériels en parties*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 4, 801–804 (1956).

<sup>2)</sup> L. FEJES TÓTH, *Sur la représentation d'une population infinie par un nombre fini d'éléments*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 10, 299–304 (1959), und *Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie*, El. Math. 15, 25–36 (1960).

der extremalen Zerlegung im ebenen Fall betrachtet, wenn  $n \rightarrow \infty$ . Er fand, dass die extremale Einteilung in überwiegender Mehrheit aus «angenähert regelmässigen» Sechsecken mit demselben Trägheitsmoment besteht, und bemerkt, dass eine derartige Einteilung in lauter solche Sechsecke im allgemeinen wahrscheinlich unmöglich ist. Zum Beispiel ist es nicht gelungen, eine derartige Einteilung zu finden, wenn das Gebiet  $G$  eine Kreisscheibe ist und die Belegungsfunktion radial abnimmt.

In der vorliegenden Note weisen wir darauf hin, dass sich diese Frage mittels der Elemente der komplexen Funktionentheorie leicht lösen lässt. Wir geben die notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine derartige Einteilung in lauter «angenähert regelmässige» Sechsecke existiert. Darunter verstehen wir folgendes:

Es existiert eine Folge von Zerlegungen von  $G$  in Sechsecke derart, dass die Gestalt der Sechsecke im Inneren von  $G$  mit der Verfeinerung der Einteilung gegen die des regelmässigen Sechsecks konvergiert und die Trägheitsmomente der einzelnen Sechsecke innerhalb jeder Einteilung miteinander übereinstimmen.



**Satz.** Es sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $p(x, y)$  eine in  $G$  positive Belegungsfunktion. Dann ist für die Existenz einer Einteilung in «angenähert regelmässige» Sechsecke mit demselben Trägheitsmoment das Erfülltsein der Relation

$$\Delta \log p(x, y) = 0 \quad (1)$$

notwendig und hinreichend, wobei  $\Delta f(x, y)$  den Laplaceschen Operator von  $f(x, y)$  bedeutet.

*Beweis.* a) *Hinlänglichkeit:* Ist (1) erfüllt, so existiert eine in  $G$  analytische Funktion  $f(z)$  mit  $|f'(z)| = [p(x, y)]^{-\frac{1}{4}}$ , ( $z = x + i y$ )<sup>3)</sup>; setzt man nämlich

$$u(x, y) = -\frac{1}{4} \log p(x, y),$$

$$v(x, y) = -\frac{1}{8} \left( \int_0^y u_x(x, t) dt - \int_0^x u_y(t, y) dt \right),$$

so erfüllt die Funktion

$$\log f'(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

<sup>3)</sup> Das Trägheitsmoment eines homogenen Kreises bezüglich seines Mittelpunktes ist mit der vierten Potenz des Radius proportional.

die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  die Laplacesche Gleichung. Da  $p(x, y)$  in  $G$  positiv ist, ist daher  $\log f'(z)$  und damit auch  $f'(z)$  eine in  $G$  reguläre Funktion. Es ist

$$\operatorname{Re} \log f'(z) = \log |f'(z)| = -\frac{1}{4} \log p(x, y),$$

und  $f(z)$  vermittelt eine konforme Abbildung von  $G$  auf ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet; hieraus folgt schon die Hinlänglichkeit der Bedingung (1).

b) *Notwendigkeit*: Nehmen wir an, es gibt zu  $G$  ein (nicht notwendigerweise einblättriges) homogenes Gebiet  $G'$  derart, dass den infinitesimal kleinen regulären Sechsecken mit demselben Trägheitsmoment in  $G$  reguläre Sechsecke in  $G'$  entsprechen. Man erkennt sofort, dass dies äquivalent mit der Existenz einer konformen Abbildung von  $G$  auf  $G'$  ist. Eine solche kann aber nur durch in  $G$  analytische Funktionen geleistet werden; das lineare «Vergrößerungsmass» ist bekanntlich gleich dem absoluten Betrag der Ableitung im betreffenden Punkt. Eine solche abbildende Funktion sei mit  $f(z)$  bezeichnet. Dann darf

$$[p(x, y)]^{-\frac{1}{4}} = |f'(z)| \quad (z = x + iy)$$

gesetzt werden. Wegen der Konformität muss in  $G$   $f'(z) \neq 0$  sein. Damit ist auch die Notwendigkeit von (1) bewiesen.

Zum Schluss seien einige Folgerungen erwähnt.

Aus dem Maximumprinzip der Funktionentheorie ergibt sich, dass sich die Niveaulinien  $p(x, y) = K$  nicht schliessen können. Daher ist es unmöglich, eine Figur mit lauter «fast regulären» Sechsecken von denselben Trägheitsmomenten zu zeichnen, wenn die Belegungsfunktion radial abnimmt. Dies wird aber möglich, wenn wir  $G$  längs einer Linie aufschneiden und auf die Konformität längs des Schnittes verzichten (Figur).

A. HEPPES und P. SZÜSZ (Budapest)

## Aufgaben

**Aufgabe 361.** Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit den Seiten  $a, b, c$  und dem Höhenschnittpunkt  $H$ . Wir bezeichnen seine Höhenfusspunkte mit  $H_a, H_b, H_c$ , die Fusspunkte der aus diesen Punkten auf die Dreiecksseiten gefälltten Lote mit  $H_{ab}, H_{ac}, H_{bc}, H_{ba}, H_{ca}, H_{cb}$  und die 12 Fusspunkte der aus diesen Punkten erneut auf die Dreiecksseiten gefälltten Lote mit  $H_{pq}$ . Hier gibt  $H_{pq}$  ( $p, q = a, b, c$ ) jeweils den Ausgangspunkt an;  $r$  bezeichnet die Dreiecksseite, auf die das Lot gefällt wurde. Es soll gezeigt werden:

1. Die Quadrupel  $H_{cab} H_{cba} H_{aba} H_{bab}$  usw. sind jeweils die Ecken von Kreisvierecken, deren Mittelpunkte  $A^*, B^*, C^*$  seien.
2. Die Höhen des Dreiecks  $A^*B^*C^*$  gehen bzw. durch die Ausgangspunkte  $A, B, C$ .

KARL WANKA, Wien

*Lösung:* Aus den Streckenverhältnissen

$$\overline{CH_{ab}} : \overline{CH_{ba}} = b : a \quad \text{und} \quad \overline{CH_{cb}} : \overline{CH_{ca}} = a : b$$

folgt  $\overline{CH_{ab}} \cdot \overline{CH_{cb}} = \overline{CH_{ba}} \cdot \overline{CH_{ca}}$ . Die Punkte  $H_{ab}, H_{cb}, H_{ca}, H_{ba}$  liegen demnach auf einem Kreis. Daraus ergibt sich, dass auch die durch Normalprojektion dieser Punkte auf  $a$  bzw.  $b$  hervorgehenden Punkte  $H_{aba}, H_{cba}, H_{cab}, H_{bab}$  Ecken eines Kreisvierecks sind. Die 1. Behauptung ist damit bereits bewiesen. Da auch von den Punktequadrupeln  $H_{ca}H_{ba}H_{bc}H_{ac}$  und  $H_{bc}H_{ac}H_{ab}H_{cb}$  jedes für sich einem Kreis angehört und da auch die Potenzlinien der drei Kreise das Dreieck  $abc$  bilden, also nicht durch einen Punkt gehen, liegen alle sechs Punkte  $H_{pq}$  auf einem und demselben Kreis. Sein Mittelpunkt sei  $M$ ; die Fusspunkte der aus  $M$  auf die Dreiecksseiten  $a, b, c$  gefälltten Lote seien  $M_a, M_b, M_c$ . Nun halbiert beispielsweise  $M_a$  die Kreissehne  $H_{ca}H_{ba}$ , woraus hervorgeht, dass die von  $M_a$  aus auf  $b$  gefällte Normale die Symmetrale der Strecke  $\overline{H_{cab}H_{bab}}$  ist.  $C^*$  ergibt sich somit als Schnittpunkt der von  $M_a$  und  $M_b$  auf  $b$  bzw.  $a$  gefälltten Lote.

In entsprechender Weise werden die Punkte  $A^*$  und  $B^*$  gefunden. Das Sechseck  $A^*M_cB^*M_aC^*M_b$  setzt sich aus den drei Parallelogrammen  $C^*M_bMM_a$  usw. zusammen;