Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 6

Rubrik: Ungelöste Probleme

deren Schnittpunkte G_f mit der Fluchtlinie u_f in Fernpunkte $\overline{G}_c$ übergehen. – Der (gedrehte) Hauptpunkt $\overline{I}$ des zweiten Zentralbildes ist leicht anzugeben.

Figur 2 erläutert den ganz analogen Vorgang zur Herstellung einer *allgemeinen Schrägperspektive*, für welche die Bildebene auch gegen die Lotrechte geneigt ist. Auch hier hängen das Frontalbild und die Schrägperspektive durch eine Zentralkollineation zusammen, welche durch die Achse $s = \pi_c \pi_f$, das im Drehsehnenfluchtpunkt S_f liegende Zentrum und ein Paar entsprechender Punkte A_f, $\overline{A}_c$ oder Geraden a_f, $\overline{a}_c$ festgelegt ist. Zur Ermittlung dieser Bestimmungsstücke wird der Seitenriss auf die zu s normale Ebene durch O herangezogen, der die Rolle des Grundrisses in Abbildung 1 übernimmt.

Ein Kunstgriff des Praktikers zur Vermeidung unerreichbarer Hilfspunkte besteht noch darin, das Frontalbild in ein geeignetes *Rahmenviereck* $1_f\, 2_f\, 3_f\, 4_f$ einzuschliessen und vorerst das kollineare Viereck $\overline{1}_c\, \overline{2}_c\, \overline{3}_c\, \overline{4}_c$ zu ermitteln. Irgendeine Bildgerade g_f kann dann in der Weise in die entsprechende Gerade $\overline{g}_c$ übergeführt werden, dass man ihre Schnittpunkte mit zwei Rahmenseiten benützt. In Abbildung 2 ist die Seite 12 parallel zur Kollineationsachse gewählt worden, die Gegenseite 34 direkt auf der Achse.

Die neue Methode, die die kollineare Beziehung zwischen zwei Projektionen aus demselben Auge auf zwei verschiedene Bildebenen verwertet, kann als Gegenstück zu dem kürzlich von F. HOHENBERG eingeführten *Umzeichnen einer Perspektive* angesehen werden, das auf dem Zusammenhang zweiter Projektionen aus verschiedenen Zentren auf dieselbe Bildebene beruht[1]. M. M. JOVIČIĆ (Beograd)

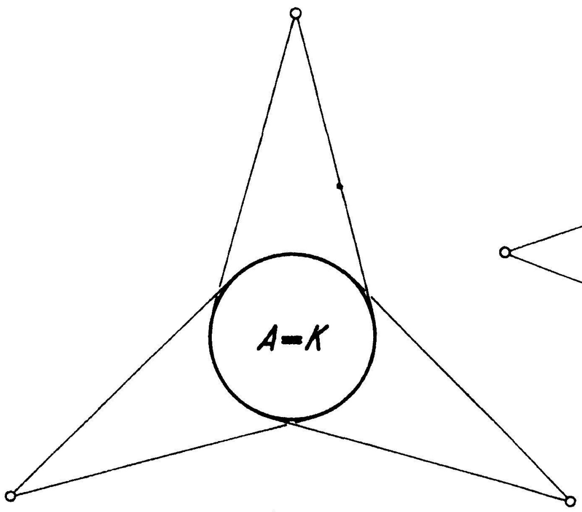
[1]) F. HOHENBERG: *Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern.* El. Math. *10*, 57–61 (1955). Vergleiche auch: *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Wien 1956), S. 107–112.

Ungelöste Probleme

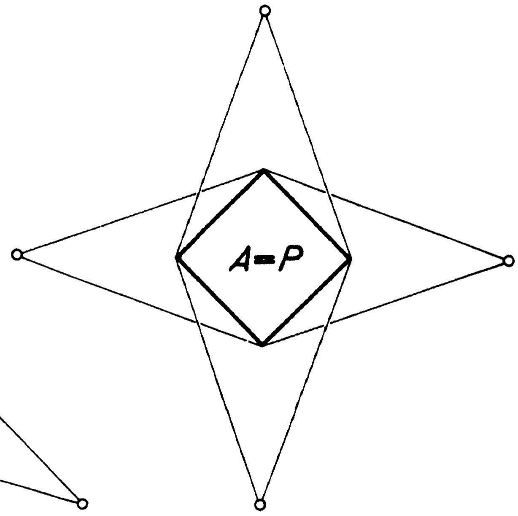
Nr. 38. Wir gehen von der folgenden, zunächst lediglich in anschaulicher Einkleidung formulierten Frage aus: *Von wievielen Punkten des Aussenraums eines konvexen Körpers aus muss dessen Oberfläche fotografiert werden, derart, dass jeder Punkt der Oberfläche bei wenigstens einer Aufnahme im Innern des Bildes aufweisbar, also samt einer gewissen Umgebung abgebildet ist?*

Die präziser gefasste Problemstellung vorbereitend, müssen einige hierzu dienliche Erklärungen gegeben werden:

Es sei A ein eigentlicher konvexer Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes, also eine dort konvexe abgeschlossene und beschränkte Punktmenge, die nicht in einem $(k-1)$-dimensionalen Unterraum liegt. Ist p ein nicht zu A gehörender Punkt und bilden wir die Vereinigungsmenge aller Strecken, die p mit Punkten von A verbinden, so entsteht die konvexe Hülle $(A; p)$, nämlich der sogenannte Kappenkörper von A mit der Spitze p. Einen Punkt der Randfläche von A wollen wir hier «vollsichtbar» von p aus nennen, wenn er innerer Punkt des eigentlichen konvexen Kappenkörpers $(A; p)$ ist. – Es bezeichne jetzt $n(A)$ die kleinste natürliche Zahl der Eigenschaft, dass es $n = n(A)$ Punkte p_i $(i = 1, \dots, n)$ im Aussenraum von A so gibt, dass die gesamte Randfläche von A im Innern der Vereinigungsmenge der n Kappenkörper $(A; p_i)$ liegt. Jeder Randpunkt von A ist dann wenigstens von einem Punkt p_i aus vollsichtbar. Vergleiche hierzu die sich auf den ebenen Fall $k = 2$ beziehenden Figuren.



n(K)=3



n(P)=4

Eine nun naheliegende Frage ist die nach dem maximalen und minimalen Wert, den die Zahlen $n(A)$ für die verschieden gestalteten konvexen Körper A annehmen. Die in diesem Sinn extremalen Körper sind diejenigen, deren Randflächen am schlechtesten und am besten von aussen überblickbar sind. Bezeichnet K eine Kugel und P ein Parallelotop, so gilt einerseits

$$n(K) = k + 1 \tag{a}$$

und andererseits

$$n(P) = 2^k\,. \tag{b}$$

Beide Resultate lassen sich mit einfachen elementaren Überlegungen gewinnen. Vermutlich ist nun K ein am besten und P ein am schlechtesten von aussen überblickbarer Körper, das heisst, dass die Ungleichung

$$k + 1 \leqslant n(A) \leqslant 2^k \tag{c}$$

gilt, wo links Gleichheit für die Kugel und rechts für Parallelotope besteht. Das hier vorliegende ungelöste Problem lautet also: *Ist es zutreffend, dass für die kleinste Zahl $n(A)$ der im Äussern eines beliebigen k-dimensionalen eigentlich konvexen Körpers A zur vollen Überblickung der Randfläche von A wählbaren Blickpunkte die Ungleichung (c) besteht, oder gibt es Körper, die in diesem Sinne noch günstiger bzw. noch ungünstiger sind, als Kugel bzw. Parallelotop?*

H. Hadwiger

Kleine Mitteilungen

Umzeichnen von Perspektiven bei ungleichgeneigten Bildebenen

Es seien die Grundebene γ und zwei Bildebenen π_1, π_2 gegeben, die sich in der Grundlinie g der Grundebene γ schneiden. Weiter seien die zu π_1, π_2 gehörigen Augen O_1, O_2 (keines von ihnen sei Fernpunkt von Normalen zu γ) gegeben. (Figur, rechts, Ansicht in Richtung g). Sei A ein beliebiger Raumpunkt, A^γ sein normales Bild in γ, A_1, A_1^γ seien die ersten, A_2, A_2^γ die zweiten Perspektiven von A, A^γ. Seien weiter H_1, H_2 die normalen Bilder von O_1, O_2 in π_1, π_2 (die sogenannten Hauptpunkte der Perspektiven). Wir drehen nun