

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	15 (1960)
<b>Heft:</b>	6
<b>Artikel:</b>	Eine neue Methode zum Zeichnen einer Schrägperspektive mittels einer Frontalperspektive
<b>Autor:</b>	Jovii, M.M.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-20717">https://doi.org/10.5169/seals-20717</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ferner

$$C \varphi_1 = q_1, \quad S \varphi_1 = q_2, \quad C \varphi_2 = p_1, \quad S \varphi_2 = p_2.$$

Also kommt aus (10) das *Subtraktionstheorem*

$$C(\varphi_1 - \varphi_2) = C \varphi_1 C \varphi_2 + \varepsilon S \varphi_1 S \varphi_2, \quad S(\varphi_1 - \varphi_2) = S \varphi_1 C \varphi_2 - S \varphi_2 C \varphi_1 \quad (14)$$

und wenn man  $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi$  setzt, durch Auflösen nach  $C \varphi_1$  und  $S \varphi_1$  mittels (11) das *Additionstheorem*

$$C(\varphi_1 + \varphi_2) = C \varphi_1 C \varphi_2 - \varepsilon S \varphi_1 S \varphi_2, \quad S(\varphi_1 + \varphi_2) = S \varphi_1 C \varphi_2 + S \varphi_2 C \varphi_1, \quad (15)$$

womit unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst ist.

Wir bemerken noch, dass sich wegen

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{S \varphi}{\varphi} = 1 \quad (16)$$

die Ableitungen

$$\frac{dS\varphi}{d\varphi} = C\varphi, \quad \frac{dC\varphi}{d\varphi} = \varepsilon S\varphi \quad (17)$$

ergeben und dass aus (15)

$$C(\varphi_1 + \varphi_2) + \sqrt{-\varepsilon} S(\varphi_1 + \varphi_2) = (C \varphi_1 + \sqrt{-\varepsilon} S \varphi_1) (C \varphi_2 + \sqrt{-\varepsilon} S \varphi_2) \quad (18)$$

folgt. Damit ergibt sich dann durch Überlegungen, die der Analysis angehören und hier nicht zur Diskussion stehen,

$$\left. \begin{aligned} C\varphi + \sqrt{-\varepsilon} S\varphi &= e^{\sqrt{-\varepsilon}\varphi} \\ C\varphi = \frac{1}{2} (e^{\sqrt{-\varepsilon}\varphi} + e^{-\sqrt{-\varepsilon}\varphi}), \quad S\varphi &= \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} (e^{\sqrt{-\varepsilon}\varphi} - e^{-\sqrt{-\varepsilon}\varphi}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Für  $\varepsilon = +1$  ist also (20a)  $C\varphi = \cos \varphi, \quad S\varphi = \sin \varphi$ ,  
für  $\varepsilon = -1$  aber (20b)  $C\varphi = \cosh \varphi, \quad S\varphi = \sinh \varphi$ ,

wie es ja schon per definitionem sein muss.

Natürlich muss man dann noch die allgemeinen Funktionen Tangens und Cotangens vermöge

$$T\varphi = \frac{S\varphi}{C\varphi}, \quad Ct\varphi = \frac{1}{T\varphi} \quad (20)$$

einführen.

K. FLADT, Calw

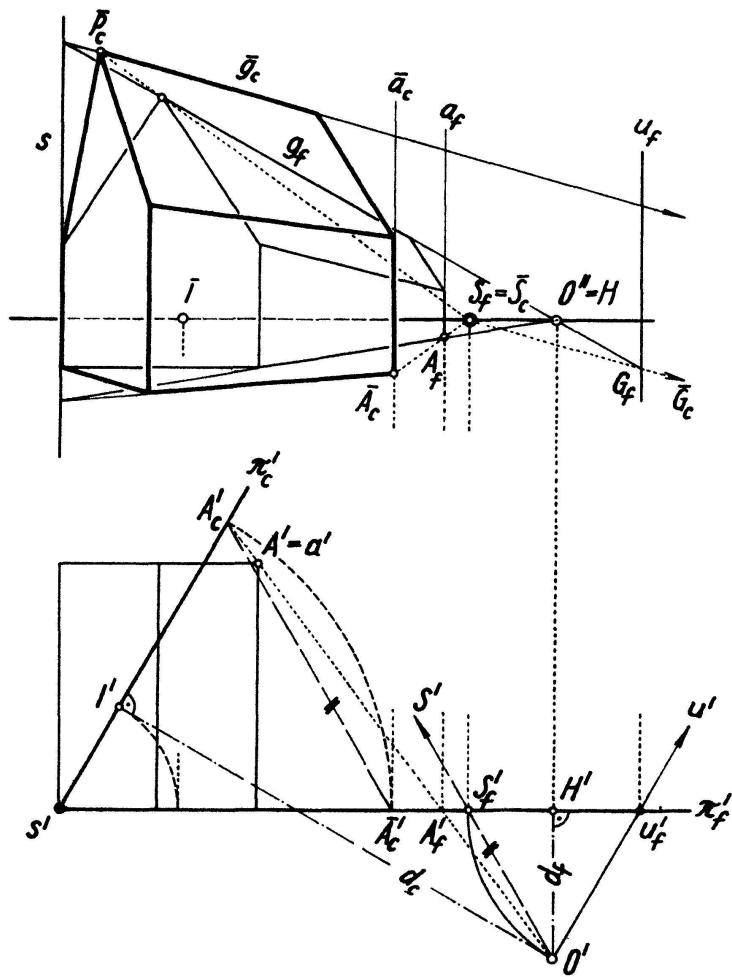
## Eine neue Methode zum Zeichnen einer Schrägperspektive mittels einer Frontalperspektive

Beim Zeichnen einer Zentralperspektive machen unzugängliche Fluchtpunkte häufig unliebsame Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten können zwar mittels graphischer Ausweichkonstruktionen oder mechanischer Hilfsmittel bewältigt werden, verursachen aber doch Verluste an Zeit und Genauigkeit. In der vorliegenden Mit-

teilung wird ein neues Verfahren zur Herstellung von beliebigen Zentralprojektionen vorgeschlagen, das die erwähnten Mißstände vermeidet.

Technische Objekte, insbesondere jene der Architektur, wo ja die Perspektive ihr Hauptanwendungsgebiet findet, besitzen im allgemeinen drei zueinander normale Hauptrichtungen. Wird die Bildebene parallel zu zwei Hauptrichtungen angenommen, so erhält man eine sogenannte *Frontalperspektive*; steht sie hingegen schräg zu zwei oder zu allen drei Hauptrichtungen, so soll von einer *Schrägperspektive* gesprochen werden.

Der Grundgedanke des neuen Verfahrens besteht in folgendem: Projiziert man ein Objekt aus einem eigentlichen Augpunkt  $O$  gleichzeitig auf eine Frontalebene  $\pi_f$  und eine beliebige Ebene  $\pi_c$ , so erhält man zwei Zentralprojektionen, die sich in perspektiv-kollinearer Lage befinden; die perspektiv-kollineare Lage bleibt auch noch erhalten, wenn man das in  $\pi_c$  liegende Bild um die Schnittgerade  $s = \pi_c \cap \pi_f$  nach  $\pi_f$  klappt. Man kann daher eine beliebige Zentralprojektion aus einer leicht und schnell zu zeichnenden Frontalperspektive durch Anwendung einer perspektiv-kollinearen Transformation ableiten.

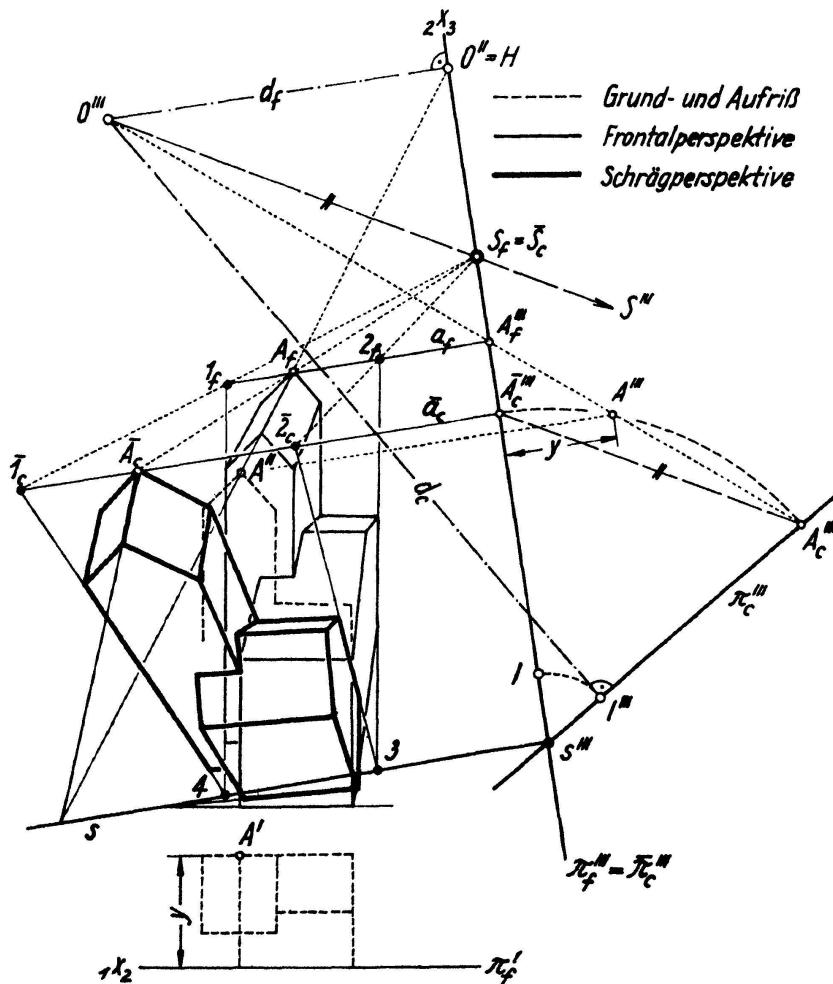


Figur 1

Figur 1 zeigt den Vorgang zur Herstellung einer üblichen Perspektive, in der die lotrechten Objektkanten parallel erscheinen. Das Objekt liege in Grund- und Aufriss in einfachster Lage dargestellt vor. Zunächst nimmt man nach Wunsch den Augpunkt  $O$  durch Grundriss  $O'$  und Aufriss  $O''$  an. Anschliessend wählt man eine zur

Aufrissebene parallele ( $O$  nicht enthaltende) Frontalebene  $\pi_f$  als erste Bildebene, ferner in passender Lage und Entfernung von  $O$  eine zweite lotrechte Bildebene  $\pi_c$ . Nun entwickelt man die Frontalperspektive des Objekts, was keine Schwierigkeiten bereitet, da die zu  $\pi_f$  parallelen Hauptrichtungen unendlich ferne Fluchtpunkte haben und die dritte Hauptrichtung den (erreichbaren) Hauptpunkt  $H = O''$  als Fluchtpunkt besitzt. Bei der Konstruktion kann man sich je nach Geschmack und Bedarf der Durchschnittsmethode bedienen oder mit Messpunkten (Teilungspunkten) arbeiten. Eine vielleicht unnatürliche Wirkung des Frontalbildes spielt keine Rolle.

Das aus  $O$  auf  $\pi_c$  erzeugte zweite Bild deckt sich in der frontalperspektivischen Darstellung mit dem ersten. Die nunmehr auszuführende *Drehung* von  $\pi_c$  nach  $\bar{\pi}_c = \pi_f$  um die Spur  $s = \pi_c \pi_f$  kann in bekannter Weise auch als *Parallelprojektion mittels der Drehsehnen* aufgefasst werden. Diese Parallelprojektion erscheint im Frontalbild als *Zentralkollineation* mit  $s$  als Achse und dem Drehsehnenfluchtpunkt  $S_f = S_c$  als Zentrum. Zur Festlegung dieser Kollineation bestimmt man noch für irgendeinen geeigneten Punkt  $A$  das Frontalbild  $A_f$  und das gedrehte zweite Zentralbild  $\bar{A}_c$ ; bessere Dienste leistet meist das Bildpaar  $a_f, \bar{a}_c$  einer lotrechten Kante  $a$  oder, falls



Figur 2

erreichbar, das Bildpaar der Ferngerade  $u$  von  $\pi_c$ , bestehend aus der Fluchtspur  $u_f$  von  $\pi_c$  und der Ferngerade  $\bar{u}_c$  der Zeichenebene. Das gesuchte *Zentralbild* des Objektes erhält man jetzt durch Transformation des Frontalbildes mittels der genannten Kollineation. Hierbei wird man vor allem die *Geraden*  $g_f$  des Frontalbildes heranziehen,

deren Schnittpunkte  $G_f$  mit der Fluchtlinie  $u_f$  in Fernpunkte  $\bar{G}_c$  übergehen. – Der (gedrehte) Hauptpunkt  $\bar{I}$  des zweiten Zentralbildes ist leicht anzugeben.

Figur 2 erläutert den ganz analogen Vorgang zur Herstellung einer *allgemeinen Schrägperspektive*, für welche die Bildebene auch gegen die Lotrechte geneigt ist. Auch hier hängen das Frontalbild und die Schrägperspektive durch eine Zentralkollineation zusammen, welche durch die Achse  $s = \pi_c \pi_f$ , das im Drehsehnenfluchtpunkt  $S_f$  liegende Zentrum und ein Paar entsprechender Punkte  $A_f, \bar{A}_c$  oder Geraden  $a_f, \bar{a}_c$  festgelegt ist. Zur Ermittlung dieser Bestimmungsstücke wird der Seitenriss auf die zu  $s$  normale Ebene durch  $O$  herangezogen, der die Rolle des Grundrisses in Abbildung 1 übernimmt.

Ein Kunstgriff des Praktikers zur Vermeidung unerreichbarer Hilfspunkte besteht noch darin, das Frontalbild in ein geeignetes *Rahmenviereck*  $1_f 2_f 3_f 4_f$  einzuschliessen und vorerst das kollineare Viereck  $\bar{1}_c \bar{2}_c \bar{3}_c \bar{4}_c$  zu ermitteln. Irgendeine Bildgerade  $g_f$  kann dann in der Weise in die entsprechende Gerade  $\bar{g}_c$  übergeführt werden, dass man ihre Schnittpunkte mit zwei Rahmenseiten benutzt. In Abbildung 2 ist die Seite 12 parallel zur Kollineationsachse gewählt worden, die Gegenseite 34 direkt auf der Achse.

Die neue Methode, die die kollineare Beziehung zwischen zwei Projektionen aus demselben Auge auf zwei verschiedene Bildebenen verwertet, kann als Gegenstück zu dem kürzlich von F. HOHENBERG eingeführten *Umzeichnen einer Perspektive* angesehen werden, das auf dem Zusammenhang zweiter Projektionen aus verschiedenen Zentren auf dieselbe Bildebene beruht<sup>1)</sup>.

M. M. Jovičić (Beograd)

<sup>1)</sup> F. HOHENBERG: *Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern*. El. Math. 10, 57–61 (1955). Vergleiche auch: *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Wien 1956), S. 107–112.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 38.** Wir gehen von der folgenden, zunächst lediglich in anschaulicher Einkleidung formulierten Frage aus: *Von wievielen Punkten des Außenraums eines konvexen Körpers aus muss dessen Oberfläche fotografiert werden, derart, dass jeder Punkt der Oberfläche bei wenigstens einer Aufnahme im Innern des Bildes aufweisbar, also samt einer gewissen Umgebung abgebildet ist?*

Die präziser gefasste Problemstellung vorbereitend, müssen einige hierzu dienliche Erklärungen gegeben werden:

Es sei  $A$  ein eigentlicher konvexer Körper des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes, also eine dort konvexe abgeschlossene und beschränkte Punktmenge, die nicht in einem  $(k-1)$ -dimensionalen Unterraum liegt. Ist  $p$  ein nicht zu  $A$  gehörender Punkt und bilden wir die Vereinigungsmenge aller Strecken, die  $p$  mit Punkten von  $A$  verbinden, so entsteht die konvexe Hülle  $(A; p)$ , nämlich der sogenannte Kappenkörper von  $A$  mit der Spitze  $p$ . Einen Punkt der Randfläche von  $A$  wollen wir hier «vollsichtbar» von  $p$  aus nennen, wenn er innerer Punkt des eigentlichen konvexen Kappenkörpers  $(A; p)$  ist. – Es bezeichne jetzt  $n(A)$  die kleinste natürliche Zahl der Eigenschaft, dass es  $n = n(A)$  Punkte  $p_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) im Außenraum von  $A$  so gibt, dass die gesamte Randfläche von  $A$  im Innern der Vereinigungsmenge der  $n$  Kappenkörper  $(A; p_i)$  liegt. Jeder Randpunkt von  $A$  ist dann wenigstens von