Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 6

Artikel: Die Kegelschnittsfunktionen
Autor: Fladt, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20716

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

[8] R. OBLÁTH, *Über die Zahl* $x^2 - 1$, Mathematica *B*, Zutphen, *8*, 161–172 (1940).
[9] – *Über die Gleichung* $x^m + 1 = y^n$. Annales Polonici Mathematici *1*, 73–76 (1954).
[10] J. W. S. CASSELS, *On the equation* $a^x - b^y = 1$. Proc. Camb. Phil. Soc. *56*, 2, 73–103 (1960).
[11] C. E. FRÖBERG, *Some computations of Wilson and Fermat remainders*, Math. Tables and other Tids to Computation *12*, 281 (1958).

Die Kegelschnittsfunktionen

1. Schon JAMES GREGORY (1638–75) hat in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Padua 1667, gezeigt, wie man mit Hilfe einbeschriebener und umbeschriebener Vielecke die Flächeninhalte von Ellipse und Hyperbel nach demselben elementaren Verfahren wie beim Kreis bestimmen kann. Nicht allgemeiner bekannt zu sein scheint, dass man auch die Theorie der Kreis- und Hyperbelfunktionen als eine Theorie der Kegelschnittsfunktionen völlig einheitlich und elementar *ohne jeden rechnerischen Grenzübergang* aufbauen kann. Zwar weiss jeder, dass Hyperbelsinus und -cosinus Funktionen nicht des Hyperbelbogens, sondern des doppelten Hyperbelsektors sind und dass man auch beim Kreis den Bogen als doppelten Sektor auffassen kann. Weniger bekannt ist, dass diese Dinge der affinen Geometrie angehören und damit eine ganz elementare Theorie ermöglichen, bei denen Kreis- und Hyperbelfunktionen in gleicher Bezeichnung erscheinen. Besonders für die gemeinsame Behandlung der beiden in der nichteuklidischen Geometrie scheint sie mir nützlich zu sein[1]).

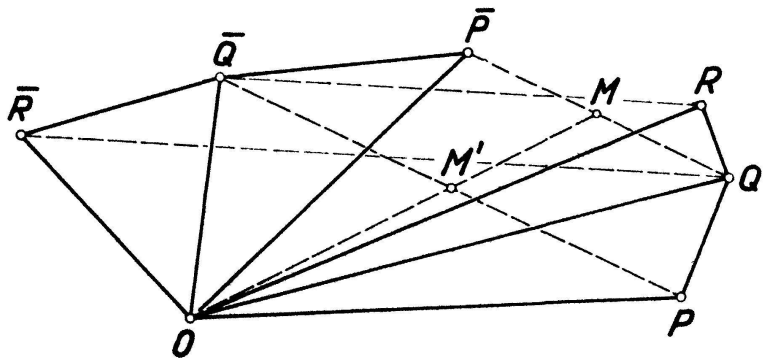
2. Wir nehmen die Gleichung des Mittelpunktskegelschnitts, bezogen auf ein affines $x_1 \mid x_2$-Koordinatensystem in der Gestalt

$$x_1^2 + \varepsilon\, x_2^2 = 1 \tag{1}$$

an. Die Koordinatenachsen sind konjugierte Durchmesser. Ist $P(p_1 \mid p_2)$ ein Punkt von (1), so hat der Endpunkt P' des zu $\overline{OP}$ konjugierten Halbmessers $\overline{OP'}$ ($\Delta OPP'$ habe positiven Umlaufsinn) die Koordinaten $(-\varepsilon\, p_2 \mid p_1)$. Dabei ist im Fall der Hyperbel ($\varepsilon = -1$) P' allerdings der reelle Ersatzpunkt auf der konjugierten Hyperbel $\varepsilon\, x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Ist ferner $Q(q_1 \mid q_2)$ ein beliebiger von P verschiedener Punkt von (1), so ist

$$2\,\Delta\, OPQ = p_1\, q_2 - p_2\, q_1\,, \qquad 2\,\Delta\, OQP' = p_1\, q_1 + \varepsilon\, p_2\, q_2\,. \tag{2}$$



Figur 1

[1]) Vergleiche dazu L. HEFFTER, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie 3*, S. 153ff., Stuttgart 1958.

Nun seien drei Punkte $P, Q, \bar{P}$ des Kegelschnitts gegeben (Figur 1)[2]. Die Aufgabe sei, $\bar{Q}$ so zu bestimmen, dass

$$\Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q} \tag{3}$$

wird.

Ist M die Mitte von $Q\bar{P}$, so existiert eine Affinspiegelung mit OM als Achse und $Q\bar{P}$ als Richtung, die $\Delta\, OPQ$ in $\Delta\, O\bar{P}\bar{Q}$ überführt, wodurch Q eindeutig bestimmt ist.

Es gilt nun

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q} & (3_1) \\ \Delta\, OQ\bar{P} = \Delta\, OQ\bar{P} & \\ \hline OPQ\bar{P} = \quad OQ\bar{Q}\bar{P} & \\ \Delta\, PQ\bar{P} = \Delta\, \bar{Q}Q\bar{P} & \\ \hline \Delta\, OP\bar{P} = \Delta\, OQ\bar{Q}\,, & (4_1) \end{array}$$

und aus (4_1) folgt rückwärts wieder (3_1).

Man kann so fortfahren:

$$\begin{array}{rl} \Delta\, ORS = \Delta\, O\bar{R}\bar{S} & (3_4) \\ \Delta\, OR\bar{R} = \Delta\, OS\bar{S} & (4_4) \\ \Delta\, OP\bar{P} = \quad OS\bar{S} & (4_5) \\ \hline \Delta\, OPS = \quad O\bar{P}\bar{S}\,. & (2_5) \end{array}$$

ist, so folgt

Ist R ein weiterer Punkt von (1), so gibt es einen Punkt R auf (1), dass

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OQR = \Delta\, OQR & (3_2) \\ \Delta\, OQQ = \Delta\, ORR & (4_2) \end{array}$$

nach (4_1):

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OP\bar{P} = \quad OR\bar{R} & (4_3) \\ \hline \Delta\, OPR = \Delta\, OP\bar{R} & (3_3) \end{array}$$

ist.

Geht man zu je $n+2$ Punkten $P, P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ und $\bar{P}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n, \bar{Q}$ über, so dass

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\, OPP_1 = \Delta\, O\bar{P}\bar{P}_1\,, \\ \Delta\, OP_i\, P_{i+1} = \Delta\, O\bar{P}_i\, \bar{P}_{i+1} \\ i = 1, 2, \ldots n-1 \\ \Delta\, OP_nQ = \Delta\, O\bar{P}_n\bar{Q} \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$\Delta\, OP\bar{P} = \Delta\, OP_i\bar{P}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n = \Delta\, OQ\bar{Q} \tag{3}$$

und damit

$$\Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q}\,. \tag{4}$$

Gilt umgekehrt (4) und dazu (2) ohne $\Delta\, OP_nQ = \Delta\, O\bar{P}_n\bar{Q}$, so gilt auch das letztere.

Wir haben in gleicher Weise für Ellipse und Hyperbel den

Satz 1. Sind einem Mittelpunktskegelschnitt eine Kette von Dreiecken OPP_1, OP_iP_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, OP_nQ sowie eine Kette von gleichvielen ihnen paarweise inhaltsgleichen Dreiecken $O\bar{P}\bar{P}_1$, $O\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$, $O\bar{P}_n\bar{Q}$ einbeschrieben, so sind auch die Dreiecke OPQ und $O\bar{P}\bar{Q}$ flächengleich, und sind umgekehrt diese flächengleich, so kann man die vorige Kette wiederfinden und zwar für jede beliebige Anzahl n von Kettengliedern und ganz unabhängig von der Wahl der Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf dem Kegelschnitt.

[2]) Ein Mittelpunktskegelschnitt ist durch den Mittelpunkt und drei Punkte bestimmt, daher ist in Figur 1 $OPQ\bar{P}\bar{Q}$ exakt, dagegen R schematisch hinzugefügt.

Schaltet man nun nicht endlich viele Zwischenpunkte ein, sondern geht zur Grenze $n \to \infty$ über, so gehen die beiden Dreiecksketten, die ja flächengleich sind, in die beiden Kurvensektoren $\widehat{OPQ}$ und $\widehat{O\bar{P}\bar{Q}}$ über: *Diese sind also flächengleich.* Wir haben daher *ohne jeden rechnerischen Grenzübergang* den

Satz 2. Haben in einem Mittelpunktskegelschnitt zwei von je zwei Halbmessern und einer Sehne begrenzte Dreiecke denselben Flächeninhalt, so sind auch die Flächen der von den Halbmesserpaaren begrenzten Sektoren gleich.

Wir können Satz 2 auch so ausdrücken:

Satz 3. Bei einem Mittelpunktskegelschnitt ist der Flächeninhalt eines von zwei Halbmessern begrenzten Sektors nur von der Fläche des von den Halbmessern und der zugehörigen Sehne begrenzten Dreiecks abhängig, nicht von der Lage des Dreiecks.

Durch indirekten Beweis folgt die Umkehrung von Satz 3:

Satz 4. Bei einem Mittelpunktskegelschnitt ist der Flächeninhalt eines von zwei Halbmessern und der zugehörigen Sehne begrenzten Dreiecks nur von der Fläche des zugehörigen Kegelschnittssektors abhängig, nicht von der Lage des Dreiecks:

$$2\,\Delta\, OPQ = p_1\, q_2 - p_2\, q_1 = F_1\,(2\,\widehat{OPQ})\,. \tag{5}$$

3. Wir können aber sofort ein zweites solches Dreieck angeben, nämlich das in 2. eingeführte:

$$2\,\Delta\, OQP' = p_1\, q_1 + \varepsilon\, p_2\, q_2 = F_2\,(2\,\widehat{OPQ})\,. \tag{6}$$

Denn es gilt die Lagrangesche Identität

$$(p_1^2 + \varepsilon\, p_2^2)\,(q_1^2 + \varepsilon\, q_2^2) = (p_1\, q_1 + \varepsilon\, p_2\, q_2)^2 + \varepsilon\,(p_1\, q_2 - p_2\, q_1)^2 \tag{7}$$

und die entsprechende für die Punkte $\bar{P}$, $\bar{P}'$, $\bar{Q}$. Aus (1), (5) und (7) folgt sofort

$$\Delta\, OQP' = \Delta\, O\bar{Q}\bar{P}', \tag{8}$$

womit (6) erwiesen ist. Wir wählen in (5) und (6) den doppelten Flächensektor

$$2\,\widehat{OPQ} = \varphi \tag{9}$$

als unabhängige Veränderliche und setzen

$$C_\varepsilon\,\varphi \equiv C\,\varphi = p_1\, q_1 + \varepsilon\, p_2\, q_2\,, \qquad S_\varepsilon\,\varphi \equiv S\,\varphi = p_1\, q_2 - p_2\, q_1 \tag{10}$$

$C\,\varphi$ heisse der *allgemeine Cosinus*, $S\varphi$ der *allgemeine Sinus*.

Nach Lagrange gilt dann

$$C^2\,\varphi + \varepsilon\, S^2\,\varphi = 1\,. \tag{11}$$

Ist A der Punkt $1 \mid 0$, B der Punkt $0 \mid 1$ (auch bei der Hyperbel als Punkt der konjugierten Hyperbel), und ist

$$2\,\widehat{OAP} = \varphi_2,\; 2\,\widehat{OAQ} = \varphi_1\,, \tag{12}$$

so ist

$$2\,\widehat{OPQ} = \varphi_1 - \varphi_2\,, \tag{13}$$

ferner

$$C\,\varphi_1 = q_1\,, \quad S\,\varphi_1 = q_2\,, \quad C\,\varphi_2 = p_1\,, \quad S\,\varphi_2 = p_2\,.$$

Also kommt aus (10) das *Subtraktionstheorem*

$$C\,(\varphi_1 - \varphi_2) = C\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 + \varepsilon\,S\,\varphi_1\,S\,\varphi_2\,, \quad S\,(\varphi_1 - \varphi_2) = S\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 - S\,\varphi_2\,C\,\varphi_1 \tag{14}$$

und wenn man $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi$ setzt, durch Auflösen nach $C\,\varphi_1$ und $S\,\varphi_1$ mittels (11) das *Additionstheorem*

$$C\,(\varphi_1 + \varphi_2) = C\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 - \varepsilon\,S\,\varphi_1\,S\,\varphi_2\,, \quad S\,(\varphi_1 + \varphi_2) = S\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 + S\,\varphi_2\,C\,\varphi_1\,, \tag{15}$$

womit unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst ist.

Wir bemerken noch, dass sich wegen

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{S\,\varphi}{\varphi} = 1 \tag{16}$$

die Ableitungen

$$\frac{dS\,\varphi}{d\,\varphi} = C\,\varphi\,, \quad \frac{dC\,\varphi}{d\,\varphi} = \varepsilon\,S\,\varphi \tag{17}$$

ergeben und dass aus (15)

$$C\,(\varphi_1 + \varphi_2) + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,(\varphi_1 + \varphi_2) = (C\,\varphi_1 + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi_1)\,(C\,\varphi_2 + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi_2) \tag{18}$$

folgt. Damit ergibt sich dann durch Überlegungen, die der Analysis angehören und hier nicht zur Diskussion stehen,

$$\left.\begin{aligned} C\,\varphi + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi &= e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} \\ C\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} + e^{-\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi}\right), \quad S\,\varphi &= \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}}\left(e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} - e^{-\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für $\varepsilon = +1$ ist also (20a) $C\,\varphi = \cos\varphi, \quad S\,\varphi = \sin\varphi\,,$
für $\varepsilon = -1$ aber (20b) $C\,\varphi = \operatorname{ch}\varphi, \quad S\,\varphi = \operatorname{sh}\varphi\,,$

wie es ja schon per definitionem sein muss.

Natürlich muss man dann noch die allgemeinen Funktionen Tangens und Cotangens vermöge

$$T\,\varphi = \frac{S\,\varphi}{C\,\varphi}\,, \quad Ct\,\varphi = \frac{1}{T\,\varphi} \tag{20}$$

einführen.

K. Fladt, Calw

Eine neue Methode zum Zeichnen einer Schrägperspektive mittels einer Frontalperspektive

Beim Zeichnen einer Zentralperspektive machen unzugängliche Fluchtpunkte häufig unliebsame Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten können zwar mittels graphischer Ausweichkonstruktionen oder mechanischer Hilfsmittel bewältigt werden, verursachen aber doch Verluste an Zeit und Genauigkeit. In der vorliegenden Mit-