Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 6

Artikel: Sur le problème de Catalan
Autor: Rotkiewicz, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20715

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1960

Sur le problème de Catalan

On ne sait pas si l'équation

$$x^z - y^t = 1 \tag{1}$$

a des solutions en entiers x, y, z, t plus grands que 1, sauf $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 3$. L'hypothèse qu'il n'existe pas de telles solutions a été exprimée en 1844 par CATALAN [1].

Récemment HAMPEL [2] a démontré que si les entiers x, y, z, t plus grands que 1 satisfont à l'équation (1), aucun des nombres x et y ne peut pas être de la forme 10^m, ni de la forme $2^n \cdot 3^m$. En utilisant les résultats obtenus par GERONO et OBLÁTH, HAMPEL en a déduit que, sauf la solution triviale citée, l'équation (1) n'a pas de solutions en entiers x, y, z, t plus grands que 1 si $x = a^m$, $y = b^n$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$, où $14 \neq \min(a, b) \leqq 19$.

Le but de cette Note est de démontrer ce théorème plus fort:

Théorème 1. *Si les entiers x, y, z, t sont > 1 et satisfont à l'équation* (1) *et si $(x, y, z, t) \neq (3, 2, 2, 3)$, chacun des nombres x et y a au moins deux diviseurs premiers distincts dont un est $\geqq 11$.*

Démonstration. Soit x, y, z, t une solution de l'équation (1) en nombres naturels > 1, autre que la solution 3, 2, 2, 3. D'après (1) on a $x^z = 1 + y^t$ et, comme LEBESGUE [3] a démontré que l'équation $x^n = 1 + y^2$, où n est un entier > 1, n'a pas de solutions en nombres naturels x, y, le nombre t doit être impair $\geqq 3$. Or, comme NAGELL [4] a démontré que l'équation $y^n = x^3 \pm 1$ n'a pas de solutions en nombres entiers, si $x \geqq 2$, $n > 2$, et EULER [5] a démontré que l'équation $y^2 = x^3 + 1$ n'a pas de solutions en entiers $x > 2$ et y – le nombre t doit être impair $\geqq 5$.

Soit p un diviseur premier du nombre $y + 1$. Comme $1 + y \mid 1 + y^t$ pour $2 \nmid t$, on trouve, d'après $x^2 = 1 + y^t$, que $p \mid x$.

Nous utiliserons encore le théorème suivant de BIRKHOFF et VANDIVER [6]:

T. Si a et b et $m > 2$ sont des nombres naturels, $a > b$ et $(a, b) = 1$, alors, sauf le cas $a = 2$, $b = 1$, $m = 6$, le nombre $a^m - b^m$ a un diviseur premier p (dit primitif) *de la forme $m\,k + 1$, tel que $p \nmid a^i - b^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, m - 1$.*

Vu que $y > 1$, $t \geqq 5$, d'après le théorème T, le nombre $y^{2t} - 1$ a un diviseur premier primitif $q \geqq 2\,t + 1 \geqq 2 \cdot 5 + 1 = 11$. Comme $y^{2t} - 1 = (y^t - 1)(y^t + 1)$ et $q \nmid y^i - 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, 2\,t - 1$, on a $q \mid y^t + 1$ et $p \neq q$. D'après $x^z = y^t + 1$ on a $p\,q \mid x$ et le nombre x a deux diviseurs premiers distincts dont un est $\geqq 11$.

De (1) il résulte que $y^t = x^z - 1$. Supposons que $z = 2$. D'après $(x - 1, x + 1) = 2$, on a ou bien

1) $x - 1 = a^t$, $x + 1 = b^t$, ou bien

2) $x - 1 = 2\,a^t$, $x + 1 = b^t/2$, ou bien

3) $x - 1 = a^t/2$, $x + 1 = 2\,b^t$, où a et b sont des nombres naturels. D'après $x \geqq pq \geqq 22$ on a $a > 1$ et $b > 1$. Dans le cas 1) on aurait

$$2 = b^t - a^t = (b - a)\,(b^{t-1} + \ldots + a^{t-1}) > b^{t-1}\,,$$

ce qui est impossible, vu que $b > 1$ et $t \geqq 5$. Dans le cas 2) on aurait

$$x + 1 = 2a^t + 2 = 2\,(a^t + 1)\,.$$

Soit p un diviseur premier quelconque du nombre $a + 1$ et soit q un diviseur premier primitif du nombre $a^{2t} - 1$ (un tel diviseur q existe, d'après le théorème T, vu que $a > 1$, $t \geqq 5$). On aura

$$p \mid a^{2t} - 1 = (a^t - 1)\,(a^t + 1)$$

et, comme $q \nmid a^i - 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, 2\,t - 1$, on a $q \mid a^t + 1$. D'après $a + 1 \mid a^t + 1$ (puisque t est un nombre impair $\geqq 5$), on trouve $p\,q \mid a^t + 1 \mid x^2 - 1 = y^t$, d'où $p\,q \mid y$ et $q \geqq 2\,t + 1 \geqq 11$, $(p, q) = 1$. Enfin, dans le cas 3) on a $x - 1 = 2\,(b^t - 1)$ et, en désignant par q un diviseur premier primitif du nombre $b^t - 1$, nous aurons $2\,q \mid 2\,(b^t - 1) \mid x^2 - 1 = y^t$, d'où $2\,q \mid y$, où, vu que $2 \nmid t \geqq 5$, on a $q \geqq 2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Si $z = 3$, on a $y^t = x^3 - 1$ et $x = 2$, $y = 3$, $t = 2$, puisque NAGELL [4] a démontré que l'équation $y^n = x^3 \pm 1$, où n est un nombre naturel > 2 n'a pas de solutions en nombres naturels x et y.

On a donc $z \geqq 5$, $3 \nmid z$. Soit p un diviseur premier du nombre $x - 1$ et q un diviseur premier primitif du nombre $x^z - 1$ (d'après $z \geqq 5$, $x > 1$ et le théorème T, un tel q existe). D'après T, q est de la forme $z\,k + 1$. Comme $z \geqq 5$, on a $q \geqq 6$. S'il était $q = 7$, on aurait $z = 6$, contrairement à $3 \nmid z$. On a donc $q \geqq 11$. Or, on a $p \neq q$, puisque $q \nmid x^i - 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, z - 1$. Donc $p\,q \mid x^z - 1 = y^t$ et $p\,q \mid y$, où $q \geqq 11$ et $(p, q) = 1$.

Notre théorème est ainsi démontré. Il résulte tout de suite de notre théorème que si les nombres x, y, z, t sont des entiers > 1, autres que $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 3$, et satisfont à l'équation (1), alors aucun des nombres x et y n'est pas de la forme 2^n, 3^m, 5^k, 7^l, $2^n \cdot 3^m$, $2^n \cdot 5^k$, $2^n \cdot 7^l$, $3^m \cdot 5^k$, $3^m \cdot 7^l$, $5^k \cdot 7^l$, $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k$, $2^n \cdot 3^m \cdot 7^l$, $2^n \cdot 5^k \cdot 7^l$, $3^m \cdot 5^k \cdot 7^l$, $2^n \cdot 3^m \cdot 5^k \cdot 7^l$.

Vu que le nombre a^m, où $m = 1, 2, \ldots$, $a < 22$ n'a pas deux diviseurs premiers distincts dont un soit $\geqq 11$, il résulte de notre théorème ce

Corollaire: Sauf le cas $x = 3$, $y = 2$, $z = 2$, $t = 3$, l'équation (1) *n'a pas de solutions en nombres naturels > 1, où $x = a^m$, $y = b^n$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$, $c = \min\,(a, b) < 22$.*

OBLÁTH [7,8] a démontré que si a, b et y sont des nombres naturels > 1, tels que $a^2 - b^y = 1$, où $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$, on a $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ et $3^{p-1} \equiv \pmod{p^2}$ pour tous les nombres premiers p tels que $p \mid y$. On en peut déduire (voir [9, 11]) que l'équation $a^2 - b^y = 1$, où $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$, n'a pas de solutions en nombres naturels a, b et y plus grands que 1 pour $y < 50000$.

De nos considérations résulte la proposition suivante:

Théorème 2. *Si les nombres naturels* > 1, a, b *et* y, *satisfont à l'équation* $a^2 - b^y = 1$, *alors, sauf le cas* $a = 3$, $b = 2$, $y = 3$, *chacun des nombres* a *et* b *a un diviseur premier de la forme* $y\,k + 1$.

Des raisonnements utilisés dans la démonstration du théorème 1 il résulte aussi le

Théorème 3. *Si les entiers* x, y, z, t *plus grands que* 1 *satisfont à l'équation* $x^z - y^t = 1$ *et ne sont pas le système* $x = 3$, $y = z = 2$, $t = 3$, *alors* x *a au moins un diviseur premier de la forme* $t\,k + 1$ *et le nombre* y *a au moins un diviseur premier de la forme* $z\,k + 1$.

Récemment CASSELS [10] a démontré que si les nombres premiers p et q, tels que $p > q \geqq 2$ satisfont à l'équation

$$a^p - b^q = \pm 1\,, \tag{2}$$

où a et b sont des entiers > 1, on a

$$q \mid a \quad et \quad p \mid b\,. \tag{3}$$

Comme, d'après les résultats de LEBESGUE et NAGELL, dans l'équation $x^z - y^t = 1$, où $(x, y, z, t) \neq (3, 2, 2, 3)$, $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$, $t > 1$, ne peut pas être $t = 2$ ni $t = 3$, il résulte du théorème de CASSELS que si l'on a l'équation (1), alors, sauf les solutions triviales citées, le nombre x a au moins un diviseur premier $\geqq 5$.

Or, du théorème de CASSELS et des théorèmes 1 et 3 résulte le

Théorème 4. *Si les nombres premiers* p *et* q *tels que* $p > q \geqq 2$ *satisfont à l'équation* (2), *où* a *et* b *sont des nombres naturels* > 1, $(a, b, p, q) \neq (3, 2, 2, 3)$, $(a, b, p, q) \neq (2, 3, 3, 2)$, *alors on a*

$$qr \mid a \quad et \quad ps \mid b\,, \tag{4}$$

où r *est un nombre premier de la forme* $q\,k + 1$ *et* s *est un nombre premier de la forme* $p\,k + 1$.

Il est encore à remarquer que du théorème T (de BIRKHOFF et VANDIVER) résulte tout de suite le théorème de MORET-BLANC d'après lequel l'équation

$$x^y - y^x = 1 \tag{5}$$

a, en nombres naturels x, y seulement les solutions $x = 2$, $y = 1$ et $x = 3$, $y = 2$.

En effet, si $y = 1$, on a $x - 1 = 1$ et $x = 2$. Si $y = 2$, on a $x^2 - 2^x = 1$, donc $(x - 1)(x + 1) = 2^x$, ce qui, vu que $(x - 1, x + 1) \mid 2$, donne $x - 1 = 2$, donc $x = 3$. Or, s'il était $y > 2$, alors, d'aprés le théorème T le nombre $x^y - 1$ (sauf le cas $y = 6$, $x = 2$) aurait un diviseur premier p de la forme $k\,y + 1 \geqq y + 1$ et, d'après $x^y - 1 = y^x$, le nombre premier $p \geqq y + 1$ serait un diviseur du nombre y, ce qui est évidemment impossible. Comme $6^2 - 2^6 \neq 1$, le théorème de MORET-BLANC se trouve démontré.

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CATALAN, J. reine angew. Math. *27*, 192 (1844).
[2] R. HAMPEL, *Sur le problème de Catalan* (en polonais), Prace Matematyczne IV, 11–19 (1960).
[3] V. A. LEBESGUE, Nouv. Ann. Math. I, *9*, 178–181 (1850).
[4] T. NAGELL, Norsk mat. Foren. Skr., I, 2, 8 (1921–22).
[5] L. EULER, *Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes*, Comm. Acad. Sci. Petropolitanae, 10 (1738).
[6] G. D. BIRKHOFF and H. S. VANDIVER, *On the integral divisors of* $a^n - b^n$, Ann. Math. (2), *5*, 173–180 (1904).
[7] R. OBLÁTH, Math. Phys. Lapok *47*, 58–77 (1940).

[8] R. OBLÁTH, *Über die Zahl* $x^2 - 1$, Mathematica *B*, Zutphen, *8*, 161–172 (1940).
[9] – *Über die Gleichung* $x^m + 1 = y^n$. Annales Polonici Mathematici *1*, 73–76 (1954).
[10] J. W. S. CASSELS, *On the equation* $a^x - b^y = 1$. Proc. Camb. Phil. Soc. *56*, 2, 73–103 (1960).
[11] C. E. FRÖBERG, *Some computations of Wilson and Fermat remainders*, Math. Tables and other Tids to Computation *12*, 281 (1958).

Die Kegelschnittsfunktionen

1. Schon JAMES GREGORY (1638–75) hat in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Padua 1667, gezeigt, wie man mit Hilfe einbeschriebener und umbeschriebener Vielecke die Flächeninhalte von Ellipse und Hyperbel nach demselben elementaren Verfahren wie beim Kreis bestimmen kann. Nicht allgemeiner bekannt zu sein scheint, dass man auch die Theorie der Kreis- und Hyperbelfunktionen als eine Theorie der Kegelschnittsfunktionen völlig einheitlich und elementar *ohne jeden rechnerischen Grenzübergang* aufbauen kann. Zwar weiss jeder, dass Hyperbelsinus und -cosinus Funktionen nicht des Hyperbelbogens, sondern des doppelten Hyperbelsektors sind und dass man auch beim Kreis den Bogen als doppelten Sektor auffassen kann. Weniger bekannt ist, dass diese Dinge der affinen Geometrie angehören und damit eine ganz elementare Theorie ermöglichen, bei denen Kreis- und Hyperbelfunktionen in gleicher Bezeichnung erscheinen. Besonders für die gemeinsame Behandlung der beiden in der nichteuklidischen Geometrie scheint sie mir nützlich zu sein[1]).

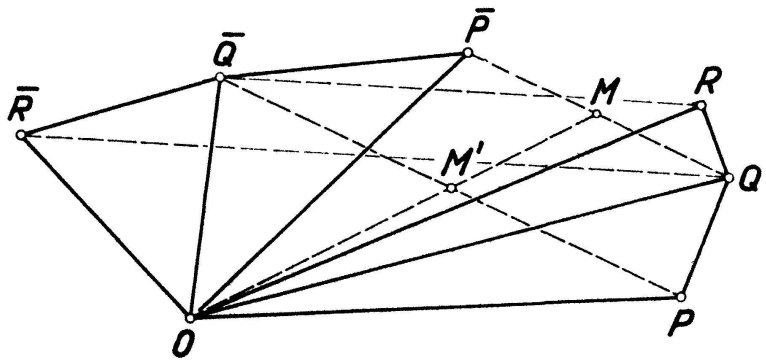
2. Wir nehmen die Gleichung des Mittelpunktskegelschnitts, bezogen auf ein affines $x_1 \mid x_2$-Koordinatensystem in der Gestalt

$$x_1^2 + \varepsilon\, x_2^2 = 1 \tag{1}$$

an. Die Koordinatenachsen sind konjugierte Durchmesser. Ist $P(p_1 \mid p_2)$ ein Punkt von (1), so hat der Endpunkt P' des zu $\overline{OP}$ konjugierten Halbmessers $\overline{OP'}$ ($\Delta OPP'$ habe positiven Umlaufsinn) die Koordinaten $(-\varepsilon\, p_2 \mid p_1)$. Dabei ist im Fall der Hyperbel ($\varepsilon = -1$) P' allerdings der reelle Ersatzpunkt auf der konjugierten Hyperbel $\varepsilon\, x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Ist ferner $Q(q_1 \mid q_2)$ ein beliebiger von P verschiedener Punkt von (1), so ist

$$2\,\Delta\, OPQ = p_1\, q_2 - p_2\, q_1\,, \qquad 2\,\Delta\, OQP' = p_1\, q_1 + \varepsilon\, p_2\, q_2\,. \tag{2}$$



Figur 1

[1]) Vergleiche dazu L. HEFFTER, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie 3*, S. 153ff., Stuttgart 1958.