Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$|BA - \lambda E|$. Das Theorem ist also richtig, was zu beweisen war. Die Gleichheit der übrigen je 2 Koeffizienten von $\lambda^0, \ldots, \lambda^{m-1}$ (sämtlich $= 0$) und von $\lambda^{m+1}, \ldots, \lambda^{n-1}$ liefert $n - 1$ weitere Theoreme. Man vergleiche mit dem obigen die Beweise bei

BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 4. Aufl. 1875, S. 46–49.
CESÀRO, *Elementares Lehrbuch der Algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung*, 1904, S. 20–22.
DICKSON-BODEWIG, *Höhere Algebra*, 1929, S. 45–46.
DÖLP, *Die Determinanten*, 5. Aufl. 1899, S. 65–68.
DÖRRIE, *Determinanten*, 1940, S. 45–50.
GANTMACHER, *Matrizenrechnung*, I, 1958, S. 8–10.
GRÖBNER, *Matrizenrechnung*, 1956, S. 101–104.
HASSE-KLOBE, *Aufgabensammlung zur Höheren Algebra*, 2. Aufl. 1952, S. 56.
KELLER, *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*, 1957, S. 91–93.
KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, 4. Aufl. 1954, S. 70–77.
LENSE, *Vorlesungen über höhere Mathematik*, 1948, S. 176.
v. MANGOLDT-KNOPP, *Einführung in die Höhere Mathematik*, I, 10. Aufl. 1955, S. 98–100.
NEISS, *Determinanten und Matrizen*, 5. Aufl. 1959, S. 35.
E. PASCAL, *Die Determinanten*, 1900, S. 26–30.
PERRON, *Algebra*, I, 3. Aufl. 1951, S. 113–115.
SMIRNOW, *Lehrgang der Höheren Mathematik*, III/1, 1954, S. 22–24.
SPERNER, *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*, 2. Aufl. 1955, S. 191–195.
WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, I, 2. Aufl. 1898, S. 112–113.

Ausser den beiden Bezeichnungen in der Überschrift gibt es noch weitere; so spricht der Jubilar vom symbolischen Produkt zweier Matrizen und versteht darunter die Determinante des Matrizenprodukts. Auch den praktischen Namen Langproduktsatz findet man, im Gegensatz zu dem einfacheren Kurzproduktsatz, zum Beispiel

$$\left|\begin{pmatrix} a\alpha \\ b\beta \\ c\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\xi \\ y\eta \\ z\zeta \end{pmatrix}'\right| = \left|\begin{pmatrix} a\alpha 0 \\ b\beta 0 \\ c\gamma 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\xi 0 \\ y\eta 0 \\ z\zeta 0 \end{pmatrix}'\right| = 0 \cdot 0 = 0 .$$

Das gewöhnliche Determinanten-Multiplikationstheorem sowie der Kurzproduktsatz können als Spezialfälle des Langproduktsatzes aufgefasst werden, im obigen Beispiel des Langproduktsatzes etwa $c = \gamma = 0$ und $c = \gamma = b = \beta = 0$. In der Tat folgert GANTMACHER das gewöhnliche Determinanten-Multiplikationstheorem aus dem Satz von BINET-CAUCHY. Andererseits definiert er die (quadratische) Diagonalmatrix nicht erst im § Quadratische Matrizen, sondern bereits vorher, und spricht schon ab S. 1 von Determinanten, ohne sie zu definieren, weil er Determinantenrechnung voraussetzt.

I. PAASCHE, München

Aufgaben

Aufgabe 356. Man konstruiere ein (im allgemeinen windschiefes) Viereck, das einer gegebenen Kugel einbeschrieben ist, und dessen Seiten der Reihe nach durch vier gegebene Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 (in allgemeiner Lage) hindurchgehen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Wählt man einen variabeln Punkt P auf der Kugel K und konstruiert den Sehnenzug $PA_1P_1A_2P_2A_3P_3A_4P_4$, so stellt die eineindeutige Abbildung der Kugel auf sich selbst $P \to P_4$ eine Kreisverwandtschaft dar. Denn wenn P einen Kreis von K beschreibt, so gilt dasselbe von P_1, P_2, P_3, P_4. (Je zwei aufeinanderfolgende von diesen fünf Kreisen sind Wechselschnitte eines Kreiskegels mit einer Spitze A_i). Projiziert man die Kugel stereographisch auf eine Tangentialebene, so wird die Abbildung $P' \to P_1'$ eine Inversion. Die Inversionspotenz ist negativ oder positiv, je nachdem A_1 innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt. In jedem Fall ist A_1' (das heisst die Projektion von A_1) Inversionszentrum. Die Abbildung $P' \to P_4'$ ist als Produkt von vier Inversionen, da sie den Winkelsinn erhält, als lineare Funktion darstellbar, wenn man die Projektionsebene als Gaußsche Zahlenebene verwendet. Es sei etwa

$$z' = \lambda \frac{z - \nu}{z - \mu} .$$

Die Punkte, denen die Zahlen λ, μ, ν entsprechen, sind leicht zu konstruieren. Der erste ist derjenige Punkt P'_4, den man erhält, wenn P im Projektionszentrum liegt ($z = \infty$). Der zweite wird erhalten, wenn P_4 in das Projektionszentrum verlegt wird und rückwärts P' konstruiert wird. Schliesslich entspricht ν dem Punkt P', für welchen P_4 zum Berührungspunkt der Projektionsebene wird, den wir als Nullpunkt der Zahlenebene wählen. Der Punkt ν kann etwa als Einheitspunkt der reellen Zahlenachse gewählt werden. Die Fixpunkte der Abbildung $P' \to P'_4$ sind dann durch die Gleichung

$$z^2 - z(\lambda + \mu) + \lambda = 0$$

gegeben und können leicht konstruiert werden. Ihre Bilder auf der Kugel führen zu je einem Punkt $P \equiv P_4$. Die Lösungsvierecke sind also stets reell im Gegensatz zum ebenen Problem. Die Abbildung $P \to P_4$ ist nur dann die Identität, wenn die Abbildungen $P \to P_2$ und $P_2 \to P_4$ reziprok sind. Die Fixpunkte der ersten sind die Schnittpunkte der Geraden A_1A_2 mit der Kugel, die der zweiten analog auf A_3A_4. $P \to P_4$ kann also nur dann identisch gelten, wenn $A_1A_2A_3A_4$ auf einer Geraden liegen. Zudem müssen dann die Paare A_1A_3 und A_2A_4 mit dem Schnittpunktepaar jener Geraden und der Kugel in Involution liegen (Desarguesscher Involutionssatz). Dies ist aber auch hinreichend.

Weitere Lösungen sandten J. Basile (Brüssel), R. Lauffer (Graz) und G. Unger (Dornach).

Aufgabe 357. Gegeben sei ein Dreieck ABC, dessen Winkel alle kleiner sind als 120°. Den Symmetriepunkt O, von dem aus die Dreiecksseiten unter gleichen Winkeln erscheinen, verbinde man mit A, B und C. Die so erhaltenen Transversalen schneiden die Dreieckseiten unter den Winkeln $\psi_1 = \sphericalangle AT_1C$, $\psi_2 = \sphericalangle BT_2A$, $\psi_3 = \sphericalangle CT_3B$. Man zeige, dass zwischen diesen Winkeln die Beziehung

$$\cos(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) = 4 \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3$$

besteht. H. Jordan, Wiesbaden

Lösung: Sind t_i ($i = 1, 2, 3$) die von O ausgehenden Eckstrahlen, so erzeugen t_i und t_{i+1} ein Teildreieck mit den Winkeln 120°, $\psi_i - 60°$, $120° - \psi_i$. Der Tangenssatz liefert

$$\operatorname{tg}\psi_i = -\sqrt{3} \cdot \frac{t_i + t_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}.$$

Der Quotient rechts ist so gebaut, dass die Summe der Produkte zu je zweien von den t_i unabhängig ist. Diese Summe hat den Wert -1. Das ergibt

$$\operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2 + \operatorname{tg}\psi_2 \operatorname{tg}\psi_3 + \operatorname{tg}\psi_3 \operatorname{tg}\psi_1 = -3$$

oder

$$-\sin\psi_1 \sin\psi_2 \cos\psi_3 - \sin\psi_2 \sin\psi_3 \cos\psi_1 - \sin\psi_3 \sin\psi_1 \cos\psi_2 = 3 \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3 .$$

Addiert man beidseitig das Produkt der $\cos\psi_i$, so ergibt sich sofort die zu beweisende Beziehung. W. Zulliger, Küsnacht

Weitere Lösungen sandten J. Berkes (Szeged), J. Binz (Bern), H. Ducommun (Zürich), W. Jänichen (Berlin), A. Kolber (Rehovoth/Israel), R. Lauffer (Graz), I. Paasche (München), J. Schopp (Budapest), K. Schuler (Rottweil), H. Zeitler (Weiden/Deutschland).

Aufgabe 358. Man berechne

$$S_n = \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n)^n ,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Grössen eines kommutativen Ringes sind und $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n\}$ alle 2^n verschiedenen Variationen mit Wiederholung zur n-ten Klasse der Zahlen $(+1, -1)$ durchläuft. R. Steuerwald, Alzing (Deutschland)

Lösung: Da die Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ einem kommutativen Ring angehören, lässt sich auf S_n ohne weiteres die polynomische Formel anwenden. Die beiden Summationen lassen sich vertauschen.

$$S_n = \sum_{v_1 + v_2 + \ldots + v_n = n} \frac{n!}{v_1!\, v_2! \ldots v_n!} a_1^{v_1} \cdot a_2^{v_2} \ldots a_n^{v_n} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n} \varepsilon_1^{v_1+1} \cdot \varepsilon_2^{v_2+1} \ldots \varepsilon_n^{v_n+1}$$

Die erste Summation erfolgt über alle n-Tupel natürlicher Zahlen, deren Summe n ergibt, die zweite Summation über alle Variationen mit Wiederholung zur n-ten Klasse der Zahlen $+1$, -1. Es ist

$$\sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_1^{v_1+1} \varepsilon_2^{v_2+1} \ldots \varepsilon_n^{v_n+1} = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn mindestens ein } v_i > 1 \text{ ist} \\ 2^n\,, & \text{wenn } v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v_n = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Ist zum Beispiel $v_1 > 1$, dann muss wegen $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = n$ ein anderes v_i $(i = 2, 3, \ldots, n) = 0$ sein, etwa $v_2 = 0$. Da $\varepsilon_2 = \pm 1$ ist, kann man schreiben:

$$\sum_{\varepsilon_i} \varepsilon_1^{v_1+1} \varepsilon_2^{v_2+1} \ldots \varepsilon_n^{v_n+1} = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_n} \left(\varepsilon_1^{v_1+1} \varepsilon_3^{v_3+1} \ldots \varepsilon_n^{v_n+1} - \varepsilon_1^{v_1+1} \varepsilon_3^{v_3+1} \ldots \varepsilon_n^{v_n+1} \right) = 0\,.$$

Aus (1) folgt jetzt sofort:

$$S_n = n!\, 2^n a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n\,.$$

E. Herrmann, Porz am Rhein

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring), C. Bindschedler (Küsnacht), J. Binz (Bern), J. Fiedler (Regensburg), W. Jänichén (Berlin), H. Meili (Winterthur), O. Reutter (Ochsenhausen/Deutschland).

Aufgabe 359. Find the number of solutions of the congruence

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) \cdots \left(x^2 - \frac{p-1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p}\,,$$

where p is an odd prime. L. Carlitz, Durham, N. C. (USA)

Lösung: Jede Lösung der Kongruenz ist Lösung genau einer der folgenden Kongruenzen

$$x^2 - t \equiv 0 \pmod{p}\,, \quad t = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

und umgekehrt. Daher ist die gesuchte Lösungsanzahl gleich der doppelten Anzahl der quadratischen Reste (mod p) unter den Zahlen $1, 2, \ldots, (p-1)/2$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $p \equiv 1 \pmod 4$. Hier gibt es gleich viele Reste und Nichtreste unter den Zahlen $1, 2, \ldots, (p-1)/2$, da mit r auch $p - r$ quadratischer Rest (mod p) ist. Aus $(r/p) = 1$ (Legendre-Symbol) folgt nämlich

$$\left(\frac{p-r}{p}\right) = \left(\frac{-r}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right) = 1\,.$$

Also gibt es in diesem Fall gleich viele quadratische Reste zwischen 0 und $p/2$ und zwischen $p/2$ und p. Da es aber unter den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ gleich viele quadratische Reste wie Nichtreste gibt, ist die Anzahl der quadratischen Reste (mod p) zwischen 0 und $p/2$ gleich $(p-1)/4$. Die Anzahl der Lösungen unserer Kongruenz beträgt daher in diesem Fall $(p-1)/2$.

b) $p \equiv 3 \pmod 4$. Hier gibt es immer mehr quadratische Reste als Nichtreste (mod p) unter den Zahlen $1, 2, \ldots, (p-1)/2$. Das folgt daraus, dass hier

$$\sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{r}{p}\right) > 0$$

ist, was man aus dem Zusammenhang dieser Summe mit der Klassenzahl binärer quadratischer Formen erkennt. Die Summe gibt den Überschuss der quadratischen Reste über die Nichtreste zwischen 0 und $p/2$ an. Die Anzahl der quadratischen Reste (mod p) unter den Zahlen 1, 2, ..., $(p-1)/2$ beträgt also

$$\frac{p-1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{r}{p}\right)$$

und die Lösungsanzahl unserer Kongruenz ist das Doppelte davon und also grösser als $(p-1)/2$.

J. FIEDLER, Regensburg

Der Aufgabensteller unterscheidet im Fall b) folgende beiden Fälle, wobei $h(-p)$ die Klassenzahl des quadratischen Körpers $R(\sqrt{-p})$ bedeutet:

$$\text{Lösungsanzahl} = \begin{cases} \dfrac{p-1}{2} + 3\,h(-p) & \text{für } p \equiv 3 \pmod 8 \\[2ex] \dfrac{p-1}{2} + h(-p) & \text{für } p \equiv 7 \pmod 8 \end{cases}$$

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin) und O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland).

Aufgabe 360. Es sei e die Eckenanzahl und r der Umkugelradius eines regulären oder halbregulären Polyeders P_e, ferner sei S_e die Quadratsumme sämtlicher Kanten und Diagonalen von P_e. Man beweise, dass

$$S_e = e^2 r^2 .$$

J. SCHOPP, Budapest

Lösung: Wir zeigen allgemeiner: Für jedes Polyeder mit n Ecken ist

$$S_n = n \cdot \sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v)^2 , \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{SP}_v$ den Vektor aus dem Polyederschwerpunkt S nach der Ecke P_v darstellt. Die Quadratsumme S_n sämtlicher Kanten und Diagonalen des Polyeders lässt sich schreiben als

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \sum_{\substack{v,u \\ v<u}} (\boldsymbol{P}_v\boldsymbol{P}_u)^2 = \sum_{\substack{v,u \\ v<u}} (\boldsymbol{SP}_v - \boldsymbol{SP}_u)^2 \\ &= \sum_{\substack{v,u \\ v<u}} [(\boldsymbol{SP}_v)^2 + (\boldsymbol{SP}_u)^2] - 2\sum_{\substack{v,u \\ v<u}} (\boldsymbol{SP}_v)\,(\boldsymbol{SP}_u) \\ &= (n-1)\sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v)^2 - \sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v) \sum_{u \neq v} (\boldsymbol{SP}_u) . \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Da S Schwerpunkt ist, muss $\sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v) = 0$ sein. Daraus folgt $\sum_{u \neq v} (\boldsymbol{SP}_u) = -\boldsymbol{SP}_v$ für $v = 1, 2, 3, \ldots n$. Jetzt ergibt sich aus (2) unsere Behauptung (1):

$$S_n = (n-1)\sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v)^2 + \sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v)^2 = n\sum_{v=1}^{n} (\boldsymbol{SP}_v)^2 .$$

Bei den regulären und halbregulären Polyedern fallen Umkugelmittelpunkt und Schwerpunkt zusammen, das heisst es ist immer $(\boldsymbol{SP}_v)^2 = r^2$. Aus (1) ergibt sich dann sofort die Behauptung der Aufgabe.

E. HERRMANN, Porz am Rhein

Weitere Lösungen sandten H. FRASCH (Stuttgart), O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland) und H. VOGLER, Wien.

Neue Aufgaben

387. Auf einem nichtzerfallenden Kegelschnitt k seien fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und S gegeben. Bekanntlich ist das Doppelverhältnis $\delta = ([SP_1]\,[SP_2]\,[SP_3]\,[SP_4])$ der vier Strahlen $[SP_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gegenüber einer Bewegung von S auf k invariant.

a) Wie müssen die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf k gewählt werden, damit $\delta = -1$ wird?

b) Wie muss die gegenseitige Lage von P_1, P_2, P_3, P_4 sein, wenn $\delta = -1$ und k eine Parabel ist?

c) In einem kartesischen Normalkoordinatensystem sind die Punkte $P_1(0, 0)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(1, 0)$ gegeben. Wie ist P_4 anzunehmen, wenn bei $\delta = -1$ der Kegelschnitt k α) eine Parabel, β) eine gleichseitige Hyperbel, γ) ein Kreis sein soll?

R. Bereis und E. Schröder, Dresden

388. Wieviele unter den ersten 3^n natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von positiven Potenzen von 3 darstellen?

W. Jänichen, Berlin

389. Man beweise: Ist $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dann ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leqq \prod_{i=1}^{n} (n\,x_i)^{x_i}$$

und Gleichheit besteht genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

O. Reutter, Ochsenhausen/Deutschland

390. Es sei $a > 1$ eine natürliche Zahl, keine Potenz von 10, und N eine natürliche Zahl. Es gibt mit m als natürlicher Zahl unendlich viele Potenzen a^m, die eine der beiden Bedingungen erfüllen:

(1) Die dekadische Entwicklung von a^m beginnt mit 1 und hat darauf folgend mindestens N Nullen.

(2) Die dekadische Entwicklung von a^m beginnt mit mindestens N Neunern.

L. Holzer, Rostock

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Im rechtwinkligen Dreieck teilt der Berührungspunkt des Inkreises die Hypotenuse in die Abschnitte x und y. Für die Fläche des Dreiecks gilt $f = x\,y$. Man beweise die Zerlegungsgleichheit von Dreieck und Rechteck.

   ▶ Ergänze das Dreieck zum Rechteck und zeichne das Rechteck $x\,y$ so hinein, dass eine Ecke im Mittelpunkt des Inkreises liegt.

2. Konstruiere den algebraischen Ausdruck

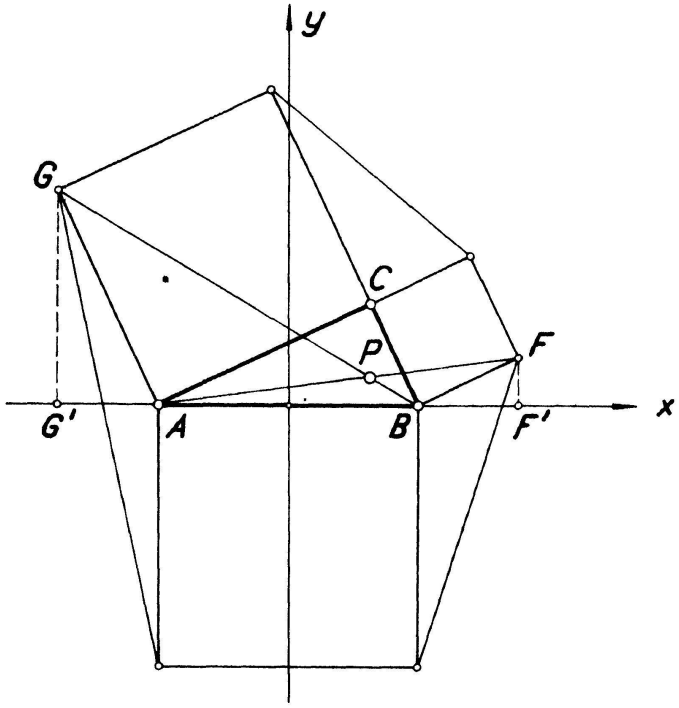
$$x = \sqrt{a^2 \pm a\,b + b^2}\,.$$

   ▶ x ist die dritte Seite eines Dreiecks mit den Seiten a und b und dem Zwischenwinkel 120°, bzw. 60°.

3. Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b werden nach aussen die Quadrate gezeichnet. Die Figur wird zu einem konvexen Sechseck ergänzt (siehe Figur), von dem Fläche und Umfang zu berechnen sind.

   ▶ $f = 2\,(a^2 + a\,b + b^2)$

$$u = a + b + \sqrt{(2\,a)^2 + (2\,b)^2} + \sqrt{(2\,a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (2\,b)^2}\,.$$



4. Die Hypotenuse $AB = c$ eines rechtwinkligen Dreiecks ist fest, die Ecke C bewegt sich auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB (siehe Figur). Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunkts $P(x; y)$ der Geraden AF und BG?

▶ F' und G' seien die Projektionen von F und G auf die Gerade AB. Die Strecken $G'A$ und BF' sind beide gleich der Höhe h des Dreiecks ABC, für die Strecken GG' und FF' findet man die Hypotenusenabschnitte p und q. Auf Grund der Strahlensätze ist deshalb sofort einzusehen, dass die Geraden AF und BG auf der Höhe h denselben Abschnitt $pq/(c + h)$ bestimmen, folglich liegt P auf der Höhe und

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 - h^2 \\ y &= \frac{h^2}{c + h} \end{aligned}\right\}$$

ist die Parameterdarstellung des geometrischen Ortes von P. Die Elimination des Parameters h ergibt

$$y = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2}{c + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - x^2}}.$$

Die Kurve heisst *Bicorne* oder *Zweispitz*.

5. Gegeben sind zwei feste Geraden a, b und ein fester Punkt C. Ein rechter Winkel dreht sich um seinen Scheitelpunkt C. Die Schenkel p und q schneiden a und b in A, bzw. B. Man bestimme diejenigen rechtwinkligen Dreiecke ABC, für die der Flächeninhalt ein Extremum wird.

▶ Bezüglich eines Koordinatensystems mit dem Ursprung C, dessen Achsen parallel den Winkelhalbierenden von a und b sind, erhält man die Gleichungen

$$(a)\ y = m\,x + n_1 \qquad (b)\ y = -\,m\,x + n_2$$

$$(p)\ y = \lambda\,x \qquad (q)\ y = -\,\frac{1}{\lambda}\,x\,.$$

Für die Fläche findet man

$$f(\lambda) = -\,\frac{n_1\,n_2}{2} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{(\lambda - m)\,(\lambda\,m - 1)}\,.$$

Diese Funktion hat für $\lambda = \pm 1$ ein positives Minimum und ein negatives Maximum. Da für den Flächeninhalt nur der absolute Betrag zu berücksichtigen ist, besteht die Lösung der Aufgabe aus zwei minimalen Dreiecken. Diese sind ähnlich, $A_1A_2B_2B_1$ ist ein Sehnenviereck.

Literaturüberschau

P. LORENZ: *Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik*

Band II/1, Der Schluss vom Teil aufs Ganze.
XI und 213 Seiten mit 27 Figuren. DM 18.60. Verlag Hirzel, Leipzig 1959

Wie schon der Titel besagt, befasst sich das Buch mit einem Hauptanliegen der mathematischen Statistik, nämlich dem «Schluss vom Teil aufs Ganze», also der Stichprobentheorie. Im Vergleich zur übrigen mathematisch-statistischen Literatur hat das Buch einen eigenwilligen, teilweise polemischen Charakter. Dies zeigt sich gleich eingangs bei der unvermeidlichen Bezugnahme auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, wo der Standpunkt vertreten wird, dass der wissenschaftliche Begriff Wahrscheinlichkeit nicht ursprünglich mathematisch, sondern physikalisch ist. Wahrscheinlichkeit ist hiernach die bei sinnvoller Abbildung eines mehrdeutigen physikalischen Prozesses auf ein Lotteriemodell sich ergebende relative Häufigkeit. Konsequenterweise wird die mathematische Statistik als Naturwissenschaft betrachtet, die sich der Mathematik behelfsmässig bedient. Im Anschluss an die Auseinandersetzung um den Begriff der Wahrscheinlichkeit wird am Beispiel einer alternativ verteilten Grundgesamtheit der Begriff des Konfidenzintervalles von Stichproben herausgeschält. Sodann gelangen zur Behandlung die Gaussverteilung, die Verteilungen von Stichproben und ihren Charakteristiken, Näherungen für Mittelwert und Varianz bei Binomial- und Polynomialverteilungen, Bestimmung von Mutungsgrenzen für Mittelwert und Varianz. In einem separaten Kapitel werden Beispiele aus Biologie und Medizin geboten, und den Schluss bildet ein ausführliches Tabellenmaterial. Ob sich das Buch mit seinen von der üblichen Methodik vielfach abweichenden Verfahren und Überlegungen zur Einführung in die Materie der mathematischen Statistik eignet, darüber kann man wohl geteilter Meinung sein. Dem Fachmann dagegen wird reichlich Gelegenheit geboten, sich mit den Schlussweisen der mathematischen Statistik erneut auseinanderzusetzen und manches Problem nochmals kritisch zu überdenken. H. JECKLIN

W. MEYER-EPPLER:

Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie

446 Seiten mit 178 Abbildungen und 1 Tafel. DM 98.—
Kommunikation und Kybernetik in Einzeldarstellungen, Band 1, Springer-Verlag 1959

Der Inhalt vom ersten Band der neuen Springer-Serie lässt sich in zwei Hauptabschnitte aufteilen: 1. Die mathematische Beschreibung physikalischer Signale und typographischer Symbolkollektive und 2. Die Untersuchung der menschlichen Kommunikation.

Zu 1. gehören die beiden Hauptkapitel: Strukturtheorie der Signale und Symbolstatistik. Im ersten dieser Kapitel wird gezeigt, nach welchen Gesetzen die Umwandlung eines stetigen zeit- wie auch ortsabhängigen Signals in die Binärdarstellung möglich ist. Darauf beruhen die fundamentalen Masse des Informationsvolumens und des Informationsflusses. Das Kapitel über die Symbolstatistik behandelt die Shannonsche Entropie und ihre Anwendungen wie z. B. auf die Codierung. Die Überleitung zu 2. geschieht durch das Kapitel «Die Sinnesorgane als Informationsempfänger», worin die in bezug auf Wahrnehmung bzw. Empfindung relevanten Schwellwerte der Sinnesorgane aufgezeichnet sind. Bis zu diesem Kapitel dürfte der Inhalt des Buches auch für einen reinen Techniker von Interesse sein. Die weiteren Kapitel dagegen wenden sich eher an diejenigen, die sich speziell mit der menschlichen Kommunikation befassen und an deren informationstheoretischer Behandlung interessiert sind. Der Zusammenhang dieses zweiten Teils mit dem ersten Teil des Buches beruht darauf, dass sich die menschliche Kommunikation vom allgemeinen Gesichtspunkt der Codierung (bzw. Umcodierung, Decodierung) betrachten lassen muss. T. RICHARD