nale dar, die wie das Volumen $V(A)$ translationsinvariant und einfach-additiv sind und also Lösungen der beiden Funktionalbedingungen

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \quad [P \cong Q]; \quad \varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$

sind, wobei «$\cong$» die Translationsgleichheit und «$+$» die Zusammensetzung im Sinne der Elementargeometrie bezeichnen.

So ergibt sich jetzt leicht, dass für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder A und B die weiteren Bedingungen

$$F(A; u) = F(B; u) \tag{b}$$

$$L(A; u, v) = L(B; u, v) \tag{c}$$

notwendig sind. Die formal unendlich vielen Bedingungen gemäss der kontinuierlich vielen wählbaren Vektoren u und v reduzieren sich in jedem individuellen Fall auf endlich viele, da diese, wie aus den oben gegebenen Vermerkungen hervorgeht, «fast immer» auf triviale Weise erfüllt sind.

Das hier vorgetragene speziellere ungelöste Problem lautet:

Sind die für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder A und B notwendigen Bedingungen a), b) und c) auch hinreichend, oder existieren noch weitere unabhängige Bedingungen?

H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Ein räumliches Analogon zur Aufgabe von Ottajano

Die im Jahre 1788 von A. GIORDANO aus Ottajano gestellte Aufgabe [1] besteht darin, *ein n-Seit zu konstruieren, das einem gegebenen Kreis ein- und gleichzeitig einem gegebenen n-Eck umbeschrieben ist.* Ersetzt man den Kreis durch einen beliebigen Kegelschnitt, so entsteht wegen des projektiven Charakters der Aufgabe keine wesentliche Verallgemeinerung. Hier soll nun die *Übertragung des Problems auf den Raum* vorgenommen werden: *Es ist ein (i. allg. windschiefes) n-Seit gesucht, das einer gegebenen einteiligen Quadrik Φ ein- und gleichzeitig einem gegebenen (i. allg. nicht ebenen) n-Eck umbeschrieben ist.* Von einem Sonderfall dieses Schliessungsproblems handelt die in den «Elementen der Mathematik» erschienene Aufgabe 356 von C. BINDSCHEDLER. Dort wird verlangt, einer gegebenen Kugel ein i. allg. windschiefes Vierseit einzuschreiben, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

Die gegebene Quadrik heisse Φ, die Eckpunkte des gegebenen n-Ecks werden mit A_i, die des gesuchten n-Seits mit P_i bezeichnet, wobei $P_i\,P_{i+1}$ mit A_i inzidieren und die Festsetzungen $A_{n+1} = A_1$ bzw. $P_{n+1} = P_1$ gelten sollen. Zur Lösung der Aufgabe projizieren wir der Reihe nach die Quadrik Φ aus den gegebenen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ auf sich selbst. Einem beliebigen Ausgangspunkt X_1 der Quadrik Φ werden durch diese n Zentralprojektionen n Bildpunkte $X_2, X_3, \ldots X_{n+1}$ zugeordnet. Diese Punkte X_i liegen so auf Φ, dass der Verbindungsstrahl $x_i = X_i\,X_{i+1}$ durch das Zentrum der i-ten Zentralprojektion A_i geht. Die gestellte Aufgabe besteht nun darin, jene Punkte X_i der Quadrik Φ zu suchen, für die $X_1 = X_{n+1}$ gilt. Um diese «geschlossenen Sehstrahlpolygone» x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ zu finden, haben wir unser Augenmerk auf die Punktverwandtschaft $X_1 \to X_{n+1}$ zu richten. Die automorphe Zentralkollineation $\mathfrak{A}_i$ der Quadrik Φ mit dem Zentrum in A_i induziert auf Φ eine Punktverwandtschaft $\mathfrak{L}_i$, die X_i mit X_{i+1} vertauscht; die Zusammensetzung aller $\mathfrak{A}_i$ ist eine allgemeine automorphe Kollineation $\mathfrak{K}$ von Φ, die auf Φ den Übergang $X_1 \to X_{n+1}$ bewerkstelligt. $\mathfrak{K}$ induziert auf Φ eine Verwandtschaft $\mathfrak{L}$, diese vertauscht jeweils die Erzeugenden und die Kegelschnitte von Φ unter sich, ist also eine «Kegelschnittverwandtschaft» auf Φ. Ferner gilt, dass in entsprechenden Punkten zugeordnete Paare von Fortschreitungsrichtungen mit den Erzeugenden ein gegenüber $\mathfrak{L}$ invariantes Doppelverhältnis bilden. Eine automorphe Kollineation von Φ wird als «gleich-» oder «gegensinnig» bezeichnet, je nachdem die beiden Erzeugendenscharen als Ganzes festbleiben oder vertauscht werden. Da eine automorphe Zentralkollineation die beiden Erzeugendenscharen vertauscht, ist $\mathfrak{K}$ «gleich-» bzw. «gegensinnig», je nachdem n gerade oder ungerade ist. Unsere Aufgabe ist demnach zurückgeführt auf die *Ermittlung der Fixpunkte der Verwandtschaft* $\mathfrak{L}$, die durch eine automorphe Kollineation von Φ auf Φ induziert wird. Zur konstruktiven Behandlung werden je nach der Realität der Erzeugenden von Φ und je nachdem n gerade oder ungerade ist, verschiedene Methoden zu verwenden sein. Auch beschränken wir uns im folgenden darauf, dass die auf Φ betrachtete Verwandtschaft eine «allgemeine Kollineation» mit vier getrennten Fixpunkten ist. Inwieweit besondere Kollineationen (Zentralkollineationen, Achsenkollineationen, usf.) auftreten können, bedarf einer besonderen Untersuchung, ist aber für den prinzipiellen Lösungsweg unwichtig.

Fall 1: *Φ besitzt reelle Erzeugenden. Ist n gerade*, so ruft $\mathfrak{L}$ in jeder Erzeugendenschar eine Projektivität hervor, deren Fixelemente Kanten des Fixtetraeders von $\mathfrak{K}$ sind. Zur Konstruktion der Fixelemente von Erzeugendenprojektivitäten ist es zweckmässig, hiezu die auf einer Erzeugenden der anderen Schar durch die Schnittpunkte induzierte Projektivität heranzuziehen. Das Fixtetraeder von $\mathfrak{K}$ enthält somit ein windschiefes Erzeugendenvierseit von Φ, da sich die Tangentialebenen an Φ in zwei gegenüberliegenden Punkten des Vierseits in der Verbindungsgeraden der beiden übrigen schneiden, liegen die von den Erzeugenden von Φ verschiedenen Kanten des Fixtetraeders von $\mathfrak{K}$ in reziproken Polaren von Φ. Die Aufgabe hat in diesem Fall vier reelle Lösungen oder keine reelle, da reziproke Polare einer Quadrik mit reellen Erzeugenden entweder beide reell oder beide komplex schneiden.

Ist dagegen *n ungerade*, so vertauscht die Iteration $\mathfrak{K}^2$ von $\mathfrak{K}$ die Erzeugenden jeder Schar in projektiver Weise untereinander. Die Fixelemente dieser Erzeugendenprojektivitäten e_1, e_2 bzw. f_1, f_2 werden von den in $\mathfrak{K}$ vertauschbaren Geradenpaaren e_1, f_1 und e_2, f_2 gebildet, wobei die Schnittpunkte $D_i = e_i f_i$ $(i = 1, 2)$ Fixpunkte von $\mathfrak{K}$ sind. Die noch fehlenden Fixpunkte liegen in der reziproken Polaren $\bar{d}$ von $d = D_1 D_2$. $V_1 = e_1 f_2$ und $V_2 = e_2 f_1$ liegen auf $\bar{d}$ und sind ein in $\mathfrak{K}$ vertauschbares Punktepaar, weshalb die restlichen Fixpunkte D_3, D_4 bzgl. V_1, V_2 harmonisch liegen. Ist also $\mathfrak{K}$ eine gegensinnige automorphe Kollineation von Φ, so werden die Fixpunkte von $\mathfrak{K}$ durch die Iteration $\mathfrak{K}^2$ entweder vertauscht oder festgehalten; genauer gilt, dass $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^2$ zwei Fixpunkte und ihre Fixtetraeder zwei in reziproken Polaren von Φ liegende Kanten gemeinsam haben. Unsere Aufgabe hat in diesem Fall entweder zwei reelle Lösungen oder keine reelle.

Fall 2: *Φ besitzt keine reellen Erzeugenden.* In diesem Fall ist es schwierig, die Erzeugendenprojektivitäten konstruktiv auszuwerten, da die auf einer Erzeugenden der anderen Schar erzeugte Projektivität nur durch komplexe Elementenpaare gegeben ist. Die Gruppe der Projektivitäten auf der Geraden als Inbegriff ihrer komplexen Punkte ist isomorph zur Gruppe der Möbiusschen Kreisverwandtschaften in der Ebene. Diese Zuordnung kann im vorliegenden Fall folgendermassen konkretisiert werden: Wir betrachten eine Zentralprojektion von Φ aus einem ihrer Nabelpunkte auf eine zur Tangentialebene in diesem Punkt parallele Bildebene. Eine solche «*stereographische Projektion*» von Φ führt die beiden Erzeugendenscharen in die isotropen Geraden der Bildebene über; den Kegelschnitten von Φ entsprechen die Kreise der Bildebene. Die Verwandtschaft $\mathfrak{L}$ geht hiebei in eine Kreisverwandtschaft $\mathfrak{M}$ in der Bildebene über, die je nachdem n gerade oder ungerade ist, gleich- oder gegensinnig konform ist. Die Lösung des Problems ist somit zurückgeführt auf die Konstruktion der Fixpunkte einer gleich- bzw. gegensinnig konformen Kreisverwandtschaft, die etwa bei Coolidge [2] durchgeführt ist.

Ist n gerade, so sei $\mathfrak{M}$ durch die drei Paare entsprechender Punkte Y_i und Y^*_i festgelegt. Wir betrachten die Möbiusinvolution $\mathfrak{J}_1$, die Y_1 mit Y_2^* bzw. Y_2 mit Y_1^* vertauscht[1]).

[1]) Eine Möbiusinvolution ist eine involutorische Kreisverwandtschaft; während jede Kreisverwandtschaft zwei zueinander orthogonale Kreis- (oder Geraden-)büschel als Ganzes in sich transformiert, lässt eine Möbiusinvolution jeden Kreis beider Büschel einzeln fest.

$\mathfrak{M}\,\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$ enthält dann Y_1 und Y_2 als vertauschbares Punktepaar und ist also selbst eine Möbiusinvolution. Jede gleichsinnig konforme Kreisverwandtschaft $\mathfrak{M}$ lässt sich demnach als Produkt von zwei Möbiusinvolutionen darstellen, deren Doppelpunkte E_1 und E_2 bzw. F_1 und F_2 selbst eine Möbiusinvolution bestimmen. Die Doppelpunkte der letzten Involution werden sowohl durch $\mathfrak{J}_1$ als auch durch $\mathfrak{J}_2$ vertauscht, sind also die gesuchten Fixpunkte von $\mathfrak{M}$. Die Konstruktion der Fixpunkte von $\mathfrak{M}$ ist demnach zurückgeführt auf die Ermittlung der Fixpunkte von drei Möbiusinvolutionen. Sind Q und Q^* ein Paar entsprechender Punkte einer Möbiusinvolution, so werden die Kreise des durch Q und Q^* bestimmten Büschels untereinander vertauscht und zwar ist diese Zuordnung eindeutig. Betrachtet man in Q entsprechenden Kreisen als Tangenten angehörende Geraden als zugeordnet, so entsteht im Strahlbüschel mit dem Scheitel Q eine Involution, deren Fixstrahlen reell sind und die Richtungen der invarianten Kreise angeben. Eine Wiederholung dieser Konstruktion liefert abermals zwei invariante Kreise, wodurch jedes der beiden invarianten Kreisbüschel vollkommen festgelegt ist; in den Grundpunkten dieser Büschel liegen die Fixpunkte der Möbiusinvolution.

Die gestellte Aufgabe hat in diesem Fall stets zwei reelle Lösungen, da von reziproken Polaren (und in solchen liegen ja zwei Verbindungsgerade der Fixpunkte von $\mathfrak{K}$) genau eine die Quadrik reell schneidet. Ist *n dagegen ungerade*, so ist $\mathfrak{K}$ eine ungleichsinnige automorphe Kollineation von Φ; wie im Fall reeller Erzeugenden verwendet man zweckmässig die iterierte Transformation $\mathfrak{K}^2$. Sie führt bei stereographischer Projektion von Φ auf eine gleichsinnig konforme Kreisverwandtschaft $\mathfrak{M}^2$, deren Fixpunkte wie oben gefunden werden können. In diesem Fall hat die Aufgabe zwei reelle oder konjugiert-komplexe Lösungen.

Abschliessend sei noch auf die *duale Aufgabe* verwiesen, einer Quadrik Φ ein n-Flach zu umschreiben, dessen Kanten a_i $(i = 1, 2, \dots n)$ in n vorgegebenen Ebenen π_i liegen. Durch Anwendung der Polarität auf Φ geht diese Aufgabe in die oben behandelte über.

H. VOGLER, Wien

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. GIORDANO, Mem. mat.-fis. Soc. It. d. sc. *4* (1788); vgl. Enz. d. Math. Wiss. III. AB *9*, S. 1026.

[2] J. L. COOLIDGE, *A Treatise on the Circle and the Sphere*. Oxford university pr. 1916, S. 323 f.

Verallgemeinerung eines Euklidischen Verfahrens

Der Euklidische Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlmenge benützt die Tatsache, dass aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind, das heisst, dass $a + 1$ lauter Primteiler enthält, die in a nicht vorkommen. Der Kern des Beweises ist dann, dass sich leicht Zahlen a angeben lassen, die alle Primzahlen einer gegebenen Menge $\mathfrak{P}$ enthalten.

Nimmt man für $\mathfrak{P}$ die Menge $\mathfrak{P}_n$ der ersten n Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$, so enthält also $a + 1$ nur Primteiler $\notin \mathfrak{P}_n$; doch ist es natürlich naiv, anzunehmen, $a + 1$ müsse selber Primzahl sein, womöglich gleich p_{n+1}.

Nun kann man aber das Verfahren elastischer machen und davon ausgehen, dass aus $(a, b) = 1$ stets $(a\,b, a \pm b) = 1$ folgt (bei Euklid ist $b = 1$). Sorgt man dafür, dass $a\,b$ alle Primzahlen aus $\mathfrak{P}_n$ enthält, so bekommt man in den Primteilern von $a \pm b \neq 1$ Primzahlen $\notin \mathfrak{P}_n$, und es ist jetzt schon nicht mehr ganz so naiv, zu glauben, die Zahlen a, b liessen sich so wählen, dass zum Beispiel $a - b = p_{n+1}$ ist. Tatsächlich gilt mindestens für kleine n erheblich mehr.

Wir bezeichnen mit $M(n)$ die grösste natürliche Zahl M, für die folgende Aussage richtig ist: Für alle natürlichen $m \leqq M$ mit $(m, p_1 \cdots p_n) = 1$ gibt es natürliche Zahlen a, b so, dass $m = a \pm b$ ist und $a\,b$ genau die Primfaktoren $p_1, p_2, \dots, p_n$ enthält. Dabei soll $M(n) = 0$ bzw. ∞[1]) gesetzt werden, wenn die Aussage für $m = 1$ falsch, bzw. für alle in Frage kommenden $m > 0$ richtig ist.

[1]) $\infty > k$ für jede natürliche Zahl k.

Dann ist, wie man ohne Schwierigkeiten feststellt, $M(1) = 10$, $M(2) = 102$, $M(3) \geqq 250$, für $n = 4$ und 5 jedenfalls $M(n) > p^2_{n+1}$ und für $n = 6$ und 7 sicher $M(n) > p_{n+1}$[2].

Von den vielen offenen Fragen hierzu seien nur die folgenden angedeutet:

1. Was lässt sich über die Funktion $M(n)$ sagen, ist zum Beispiel stets $M(n) > 1$ oder $M(n) > p_{n+1}$? Gibt es ein n mit $M(n) = \infty$?
2. Asymptotisches Verhalten bei Verzicht auf die Grössenbeschränkung von m?
3. Anzahl der Darstellungen?

ERICH TEUFFEL

[2]) $1 = 2^5 \cdot 5 \cdot 13 - 3^3 \cdot 7 \cdot 11$ $\quad 17 = 2 \cdot 7 \cdot 13 - 3 \cdot 5 \cdot 11$
$1 = 5 \cdot 11 \cdot 13 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ $\quad 19 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 - 7 \cdot 11 \cdot 13$

Bemerkungen zur Zahl e

1. Zur Herleitung von e

Herr Prof. B. L. VAN DER WAERDEN hat in dieser Zeitschrift (Bd. XII, Nr. 1, Januar 1957), ausgehend von der Definition des natürlichen Logarithmus als Flächeninhalt

$$\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x},$$

die Zehnerlogarithmen und ihre Rechenregeln hergeleitet. Die Zahl e wurde dabei gewissermassen unterwegs über die Definitionsgleichung $\ln e = 1$ eingeführt. Der Nachweis, dass

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

ist dann sehr einfach (siehe dort die Formel (27) und folgende). Die letztgenannte Beziehung wird jedoch von aussen herangetragen. Es wäre noch natürlicher, sie aus den vorhergehenden Überlegungen heraus entwickeln zu können.

Wir schlagen nun einen solchen Weg ein, der zugleich Gelegenheit gibt, das eingangs erwähnte Integral als Grenzwert zu fassen.

$$\text{Für welchen Wert } a > 1 \text{ ist} \int_1^a y\,dx = \int_1^a \frac{dx}{x} \text{ gleich Eins?}$$

Zur Berechnung des Integrals zerlegen wir die Strecke von 1 bis zum beliebigen $x = x_m > 1$ auf der x-Achse in m Intervalle mit den Trennstellen

$$x_0 = 1\,, \quad x_1 = 1 + \frac{1}{n}\,, \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \ldots x_m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$$

und den entsprechenden Ordinaten

$$y_0 = 1\,, \quad y_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\,, \quad y_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}, \ldots y_m = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m};$$

n ist wie m eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl. Wir rechnen die inneren Trennstellen jeweils beiden Intervallen zu.

Nun bilden wir die Obersumme mit den Werten $y = 1/x$ am linken Intervallrand

$$\sum_0^{m-1} y_i\,(x_{i+1} - x_i) = \sum_0^{m-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^i}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^i} \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) = \sum_0^{m-1} \frac{1}{n} = \frac{m}{n};$$

desgleichen die Untersumme mit den y-Werten am rechten Intervallrand

$$\sum_0^{m-1} y_{i+1}(x_{i+1} - x_i) = \sum_0^{m-1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^i}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i+1}} \left(1+\frac{1}{n} - 1\right) =$$

$$\sum_0^{m-1} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{m}{n+1}.$$

Nun setzen wir $m = n$. Die Obersumme wird dann zu 1, die Untersumme zu $n/(n+1)$. n möge über alle Grenzen wachsen. Dann strebt auch die Untersumme gegen 1. x_m dagegen hat den Wert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

zur Grenze. Dies ist somit das gesuchte a.

2. *Die obere Schranke von e*

Dass $(1 + 1/n)^n$, $n > 0$ und ganz, mit n monoton wächst und eine obere Schranke hat, wird auf verschiedenen Wegen bewiesen. Derjenige über die Binomialformel mit Ausrechnen und Abschätzen der Glieder ist solange nicht gangbar, als diese Formel von den Schülern noch nicht beherrscht wird. Selbst dann aber, wenn man sich auf sie zu stützen vermag, ist dieser Weg etwas umständlich.

Kürzer und einfacher ist das Verfahren, wie es zum Beispiel in einem älteren Göschenbändchen (Differentialrechnung, von Prof. F. JUNKER) geschildert wird:

Ist $a > b > 0$, n eine natürliche Zahl, so gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\,(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + b^n) < (a-b)\,(n+1)\,a^n.$$

Setzt man $a = 1 + 1/n$, $b = 1 + 1/(n+1)$, so gewinnt man daraus die Monotonie-Ungleichung

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Setzt man hingegen $a = 1 + 1/2\,n$, $b = 1$, so gewinnt man eine Ungleichung für die obere Schranke

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4\,.$$

Soweit die zitierte Quelle.

Die letzte Beziehung lässt sich aber auch verallgemeinern, indem wir $a = 1 + 1/k\,n$, $b = 1$ setzen; k sei eine ganze Zahl grösser als Eins.

Dann wird nach kurzer Rechnung

$$\left(1+\frac{1}{k\,n}\right)^{kn} < \left(\frac{k}{k-1}\right)^k.$$

Ohne den Verlauf der Grösse rechts bei veränderlichen k überhaupt genauer verfolgen zu müssen, gewinnt man rasch recht annehmbare Abschätzungen für e nach oben.

Nimmt man zum Beispiel $k = 6$, wird der Ausdruck rechts

$$\left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} < 3\,; \quad k = 11 \text{ liefert } \left(\frac{11}{10}\right)^{11} = 2{,}853\ldots$$

Zinseszinstabellen mit den Zinsfüssen von beispielsweise 2% und 4% entnimmt man mühelos für

$$k = 26 \text{ und } k = 51 \quad \left(\frac{26}{25}\right)^{26} = 1{,}04^{26} = 2{,}772\ldots \text{ und } \left(\frac{51}{50}\right)^{51} = 1{,}02^{51} = 2{,}745\ldots$$

BERNHARD ROMER

Zerlegung von Tetraedern in Orthogonaltetraeder

In «Ungelöste Probleme Nr. 13» führt H. HADWIGER aus, dass für die Dimensionen $k > 2$ ungeklärt sei, ob sich ein Simplex in lauter Orthogonalsimplexe zerlegen lässt. In der Ebene lässt sich jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Simplexe höherer Dimension kann man leicht in Orthogonalsimplexe zerlegen, wenn es einen Punkt des Simplexes gibt, von dem aus man auf alle eindimensionalen Kanten, mit denen der Punkt nicht inzidiert, das Lot fällen kann, so dass die Fusspunkte den Kanten angehören. Aber schon für $k = 3$ kann man leicht Tetraeder angeben, bei denen es keinen solchen Punkt gibt, z. B. das Tetraeder mit den Ecken $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (3, 1, 0)$, $D = (4, 1, 0)$ in einem Kartesischen Koordinatensystem. Alle Punkte des Raumes, von denen aus man das Lot auf AB bzw. CD fällen kann, so dass der Fusspunkt auf der betreffenden Kante liegt, werden durch die Ungleichungen $0 \leqq x + z \leqq 2$ bzw. $3 \leqq x \leqq 4$ charakterisiert. Der Durchschnitt dieser beiden Punktmengen erfüllt die Ungleichung $z \leqq -1$, liegt also ganz ausserhalb des Tetraeders $ABCD$.

Im allgemeinen Fall ist daher die oben angedeutete Simplexzerlegung nicht anwendbar, und es wird vermutlich sehr schwierig sein, eine allgemeine Zerlegung in Orthogonalsimplexe anzugeben, wenn überhaupt eine existiert. Im Fall $k = 3$ habe ich jedoch ein Verfahren gefunden, Tetraeder so in Orthogonaltetraeder zu zerlegen, dass deren Anzahl höchstens 12 beträgt.

Zuvor möchte ich einige abkürzende Redeweisen einführen. Wenn man das Lot von einem festen Punkt auf eine Kante oder Seite eines Polyeders fällen kann, so dass der Fusspunkt im Innern der Kante oder Seite liegt, sage ich: Das Lot lässt sich *in* die Kante oder Seite fällen. Wenn auch die Randpunkte noch zugelassen sind, sage ich: Das Lot lässt sich *auf* die Kante oder Seite fällen. Ferner bedeutet N die kleinstmöglichste Zahl von Orthogonaltetraedern, in die sich das jeweils betrachtete Tetraeder zerlegen lässt.

Ich untersuche nun zunächst eine besondere Tetraederart $T1$, bei der die Ecken so benannt werden können, dass die Kante CD auf der Seite ABC senkrecht steht. Die Ecken A und B benenne ich so, dass der Winkel BAC spitz ist. $T1$ unterteile ich weiter:

T1a: Der Winkel ABC ist ein rechter. Dann ist $ABCD$ ein Orthogonaltetraeder und $N = 1$.

T1b: Der Winkel ABC ist spitz. Dann fälle ich von C in AB das Lot mit dem Fusspunkt E, und $ABCD$ zerfällt in die beiden Orthogonaltetraeder $AECD$ und $BECD$. $N = 2$.

T1c: Der Winkel ABC ist stumpf. Dann fälle ich von B in AC das Lot mit dem Fusspunkt F, und da ACD ein rechtwinkliges Dreieck ist, kann man von F in die Hypotenuse AD das Lot mit dem Fusspunkt G fällen. $ABCD$ zerfällt nun in die drei Orthogonaltetraeder $BFCD$, $BFGD$ und $BFGA$, und man hat $N = 3$.

Unter den übrigen Tetraedern zeichne ich die Art $T2$ aus, bei der man von einer Ecke, genannt D, das Lot auf die Seite ABC fällen kann. $T2$ unterteile ich weiter:

T2a: Der Fusspunkt E dieses Lotes fällt in eine Kante, etwa in AB. Dann zerfällt $ABCD$ in die beiden Tetraeder $AECD$ und $BECD$ der Art $T1$, und zwar ist höchstens eins dieser beiden Tetraeder von der Art $T1c$, da man von E auf AC oder BC das Lot fällen kann. Daher ist hier $N \leqq 5$.

T2b: Der Fusspunkt E fällt in die Seite ABC. Von E kann man auf höchstens eine Seite von ABC nicht das Lot fällen; daher zerfällt $ABCD$ in die drei Tetraeder $ABED$, $ACED$ und $BCED$ der Art $T1$, von denen höchstens eins von der Art $T1c$ ist. Also ist $N \leqq 7$.

Um nun überhaupt zu zeigen, dass sich jedes Tetraeder in Orthogonaltetraeder zerlegen lässt, kann man vom Inkugelzentrum Z ausgehend (von dem aus sich die Lote in alle vier Seiten des Tetraeders stets fällen lassen) $ABCD$ in die vier Tetraeder $ZABC$, $ZABD$, $ZACD$ und $ZBCD$ der Art $T2b$ zerlegen und hat nun $N \leqq 28$.

Um eine allgemeine Zerlegung mit $N \leqq 12$ anzugeben, benötige ich noch einige Hilfssätze. Soweit sie unmittelbar einleuchten, verzichte ich auf den Beweis. Eine Kante heisse spitz oder stumpf, wenn der zugehörige Flächenwinkel spitz oder stumpf ist. Unter den Kanten einer Seite verstehe ich die der Seite anliegenden Kanten.

Hilfssatz 1: Von den drei Kanten einer Tetraederseite ist mindestens eine spitz.

Hilfssatz 2 : Wenn in einer Ecke eines Tetraeders drei nicht spitze Kanten zusammentreffen, sind die übrigen drei Kanten spitz.

Hilfssatz 3: Ein Tetraeder gehört genau dann zu $T1$ oder $T2$, wenn es eine Seite mit drei nicht stumpfen Kanten besitzt.

Hilfssatz 4: Wenn in einer Tetraederecke eine spitze und zwei stumpfe Kanten zusammentreffen, sind die den stumpfen Kanten gegenüberliegenden ebenen Winkel ebenfalls stumpf.

Beweis (mit Hilfe des Winkelkosinussatzes):
Es sei α, β stumpf, γ spitz, also $\cos\alpha < 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma > 0$. Daraus folgt

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} < 0\,,$$

d.h. a ist stumpf.

Hilfssatz 5: Ein Tetraeder kann keine vier stumpfen Kanten haben.

Beweis: Hätte ein Tetraeder vier stumpfe Kanten, so könnten wegen Hilfssatz 1 und 2 nicht drei von ihnen zu derselben Seite oder Ecke gehören. Es würden also in jeder Ecke zwei stumpfe und eine spitze Kante zusammentreffen. Nach Hilfssatz 4 würden daher in jeder Ecke mindestens zwei stumpfe ebene Winkel zusammentreffen. Da das Tetraeder aber höchstens vier stumpfe ebene Winkel hat, kann das nicht sein.

Bei den Tetraedern, die nicht zu $T1$ oder $T2$ gehören, hat jede Seite wegen Hilfssatz 3 mindestens eine stumpfe Kante. Wegen Hilfssatz 5 sind also Tetraederarten mit zwei und drei stumpfen Kanten zu unterscheiden, die ich $T3$ und $T4$ nenne.

$T3$: Die beiden stumpfen Kanten liegen einander gegenüber, seien also mit AC und BD bezeichnet. Den Punkt E auf BD wähle ich so, dass die beiden Ebenen durch ABC und AEC aufeinander senkrecht stehen. Die senkrechte Projektion von BD auf die Ebene durch ABC schneidet AC in einem Punkte F, weil die Kanten AB und BC beide nicht stumpf sind, und F ist der Fusspunkt des Lotes von E auf AC. Das Tetraeder $ABCE$ ist also von der Art $T2a$, und das Tetraeder $AECD$ ist von der Art $T2b$, weil die Kanten seiner Seite ACD alle nicht stumpf sind. Daher gilt für $T3$: $N \leqq 12$.

$T4$: Die drei stumpfen Kanten gehören wegen Hilfssatz 1 bis 3 nicht zu derselben Ecke oder Seite, man kann sie also mit AC, BC und BD bezeichnen. E wird wie bei $T3$ bestimmt. Da die Kanten BC und BD stumpf sind, die Kante AB dagegen nach Hilfssatz 2 und 3 spitz sein muss, ist der ebene Winkel ABC nach Hilfssatz 4 stumpf, man kann also das Lot von B in AC fällen. Daher gehört das Tetraeder $ABCE$ wiederum zu $T2a$ und das Tetraeder $AECD$ wie oben zu $T2b$, und man hat auch hier $N \leqq 12$.

Damit sind alle möglichen Tetraederarten zerlegt mit $N \leqq 12$. Ich vermute, dass es Tetraeder gibt, die sich nicht in weniger als 12 Orthogonaltetraeder zerlegen lassen.

H.-Chr. Lenhard (Münster, Westf.)

Einfache Herleitung des verallgemeinerten Determinanten-Multiplikationstheorems (Satz von Binet-Cauchy) bei rechteckigen Matrizen nebst Erweiterung

Herrn Oskar Perron zu seinem 80. Geburtstag am 7. Mai 1960 in Verehrung gewidmet

Bekanntlich ist mit unbestimmten Buchstabengrössen

$$\left|\begin{pmatrix} a & b & c\\ \alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z\\ \xi & \eta & \zeta\end{pmatrix}'\right| = \begin{vmatrix} ax+by+cz & a\xi+b\eta+c\zeta\\ \alpha x+\beta y+\gamma z & \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y\\ \xi & \eta\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c\\ \alpha & \gamma\end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & z\\ \xi & \zeta\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c\\ \beta & \gamma\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y & z\\ \eta & \zeta\end{vmatrix}$$

der einfachste Fall des sogenannten verallgemeinerten Determinanten-Multiplikationstheorems mit nicht identisch verschwindender Determinante. Der einfachste Beweis dieses Theorems ist folgender: Sind A und B zwei $n \cdot n$-Matrizen mit unbestimmten Elementen, so haben AB und BA bekanntlich das gleiche charakteristische Polynom, weil $|AB - \lambda E| = |BA - \lambda E|$ nach dem gewöhnlichen Determinanten-Multiplikationstheorem aus $B(AB - \lambda E) = (BA - \lambda E)B$ folgt (E = Einheitsmatrix). Bestehen in A genau die letzten m Zeilen und in B genau die letzten m Spalten aus lauter Nullen, so enthält AB rechts und unten je m Reihen Nullen und $|AB - \lambda E|$ damit den Faktor λ^m. Der zu beweisende Satz von Binet-Cauchy besagt nun nichts weiter als die Gleichheit der Koeffizienten der niedrigsten Potenz von λ, nämlich dieses λ^m in $|AB - \lambda E|$ und

$| BA - \lambda E |$. Das Theorem ist also richtig, was zu beweisen war. Die Gleichheit der übrigen je 2 Koeffizienten von $\lambda^0, \ldots, \lambda^{m-1}$ (sämtlich $= 0$) und von $\lambda^{m+1}, \ldots, \lambda^{n-1}$ liefert $n - 1$ weitere Theoreme. Man vergleiche mit dem obigen die Beweise bei

BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 4. Aufl. 1875, S. 46–49.
CESÀRO, *Elementares Lehrbuch der Algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung*, 1904, S. 20–22.
DICKSON-BODEWIG, *Höhere Algebra*, 1929, S. 45–46.
DÖLP, *Die Determinanten*, 5. Aufl. 1899, S. 65–68.
DÖRRIE, *Determinanten*, 1940, S. 45–50.
GANTMACHER, *Matrizenrechnung*, I, 1958, S. 8–10.
GRÖBNER, *Matrizenrechnung*, 1956, S. 101–104.
HASSE-KLOBE, *Aufgabensammlung zur Höheren Algebra*, 2. Aufl. 1952, S. 56.
KELLER, *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*, 1957, S. 91–93.
KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, 4. Aufl. 1954, S. 70–77.
LENSE, *Vorlesungen über höhere Mathematik*, 1948, S. 176.
v. MANGOLDT-KNOPP, *Einführung in die Höhere Mathematik*, I, 10. Aufl. 1955, S. 98–100.
NEISS, *Determinanten und Matrizen*, 5. Aufl. 1959, S. 35.
E. PASCAL, *Die Determinanten*, 1900, S. 26–30.
PERRON, *Algebra*, I, 3. Aufl. 1951, S. 113–115.
SMIRNOW, *Lehrgang der Höheren Mathematik*, III/1, 1954, S. 22–24.
SPERNER, *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*, 2. Aufl. 1955, S. 191–195.
WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, I, 2. Aufl. 1898, S. 112–113.

Ausser den beiden Bezeichnungen in der Überschrift gibt es noch weitere; so spricht der Jubilar vom symbolischen Produkt zweier Matrizen und versteht darunter die Determinante des Matrizenprodukts. Auch den praktischen Namen Langproduktsatz findet man, im Gegensatz zu dem einfacheren Kurzproduktsatz, zum Beispiel

$$\left| \begin{pmatrix} a\,\alpha \\ b\,\beta \\ c\,\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\,\xi \\ y\,\eta \\ z\,\zeta \end{pmatrix}' \right| = \left| \begin{pmatrix} a\,\alpha\,0 \\ b\,\beta\,0 \\ c\,\gamma\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\,\xi\,0 \\ y\,\eta\,0 \\ z\,\zeta\,0 \end{pmatrix}' \right| = 0 \cdot 0 = 0 .$$

Das gewöhnliche Determinanten-Multiplikationstheorem sowie der Kurzproduktsatz können als Spezialfälle des Langproduktsatzes aufgefasst werden, im obigen Beispiel des Langproduktsatzes etwa $c = \gamma = 0$ und $c = \gamma = b = \beta = 0$. In der Tat folgert GANTMACHER das gewöhnliche Determinanten-Multiplikationstheorem aus dem Satz von BINET-CAUCHY. Andererseits definiert er die (quadratische) Diagonalmatrix nicht erst im § Quadratische Matrizen, sondern bereits vorher, und spricht schon ab S. 1 von Determinanten, ohne sie zu definieren, weil er Determinantenrechnung voraussetzt.

I. PAASCHE, München

Aufgaben

Aufgabe 356. Man konstruiere ein (im allgemeinen windschiefes) Viereck, das einer gegebenen Kugel einbeschrieben ist, und dessen Seiten der Reihe nach durch vier gegebene Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 (in allgemeiner Lage) hindurchgehen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Wählt man einen variabeln Punkt P auf der Kugel K und konstruiert den Sehnenzug $PA_1P_1A_2P_2A_3P_3A_4P_4$, so stellt die eineindeutige Abbildung der Kugel auf sich selbst $P \to P_4$ eine Kreisverwandtschaft dar. Denn wenn P einen Kreis von K beschreibt, so gilt dasselbe von P_1, P_2, P_3, P_4. (Je zwei aufeinanderfolgende von diesen fünf Kreisen sind Wechselschnitte eines Kreiskegels mit einer Spitze A_i). Projiziert man die Kugel stereographisch auf eine Tangentialebene, so wird die Abbildung $P' \to P'_1$ eine Inversion. Die Inversionspotenz ist negativ oder positiv, je nachdem A_1 innerhalb oder ausserhalb der Kugel liegt. In jedem Fall ist A'_1 (das heisst die Projektion von A_1) Inversionszentrum. Die Abbildung $P' \to P'_4$ ist als Produkt von vier Inversionen, da sie den Winkelsinn erhält, als lineare Funktion darstellbar, wenn man die Projektionsebene als Gaußsche Zahlenebene verwendet. Es sei etwa

$$z' = \lambda \frac{z - \nu}{z - \mu} .$$