

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 5

Artikel: Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)
Autor: Sydler, J.-P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20714>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1960

Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod. 0) lorsque leur différence est équivalente à un cube. Nous allons donner des exemples de couples de tétraèdres jouissant de cette propriété.

1. Soit $(\alpha, \beta; \gamma)$ un tétraèdre $ABCD$ tel que: $\overline{AB} \perp \overline{BCD}$, $\overline{DC} \perp \overline{CBA}$, dièdre $AB = \alpha$, dièdre $CD = \beta$, dièdre $AD = \gamma$; $\overline{AB} = \cotg \alpha$, $\overline{CD} = \cotg \beta$. On a $\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ et $\overline{AD} = \tg \gamma$.

Considérons les deux tétraèdres $(\delta, \alpha; \pi/3) = ABCD$ et $(\delta, 2\alpha; \alpha) = A'B'C'D'$. Comme $\sin \alpha \cdot \sin \delta = 1/2$, nous supposons $\pi/4 > \alpha > \pi/6$.

Les tétraèdres $(\alpha, \delta; \pi/3)$ et $(2\alpha, \delta; \alpha)$ sont équivalents entre eux (mod. 0).

Montrons d'abord que les conditions nécessaires de DEHN pour l'équivalence sont vérifiées. On a pour les dièdres les relations:

$$\sphericalangle CD = \alpha; \quad \sphericalangle C'D' = 2\alpha; \quad \sphericalangle A'D' = \alpha; \quad \sphericalangle AB = \delta, \quad \sphericalangle A'B' = \delta,$$

les autres dièdres étant rationnels en π . Il faut donc que les longueurs vérifient les relations:

$$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'}; \quad \overline{AB} = \overline{A'B'},$$

relations qui sont effectivement remplies puisque

$$2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'} = 2 \cotg 2\alpha + \tg \alpha = \cotg \alpha = \overline{CD};$$

$$\overline{AB} = \cotg \delta = \overline{A'B'}.$$

Montrons maintenant que l'équivalence (mod. 0) a bien lieu. Enlevons du tétraèdre $ABCD$ le tétraèdre $A'B'C'D'$ de façon que $A' = A$, $B' = B$, $C' = E$ sur BC , $D' = F$ sur BD [fig. 1].

Menons par E et par F les perpendiculaires au plan ACD et soient G et H leurs pieds. Traçons encore la droite AH qui coupe CD en J et soit enfin M le milieu de JC .

Comme $\sphericalangle AEC = \pi - 2\alpha$ et $\sphericalangle ACB = \alpha$, la droite EG est la bissectrice de AEC et la médiatrice de AC . Le triangle AEC est isocèle, le plan $GEFH$ est le plan médiateur de AC , et l'on a $\overline{AF} = \overline{FC} = \tg \alpha$. Comme G est au milieu de AC , $\overline{GH} = \overline{CM} = \overline{MJ}$ et d'autre part, $\overline{GH} = \overline{FE} = \cotg 2\alpha$. On a donc:

$$\overline{FC} = \overline{FJ} = \tg \alpha; \quad \overline{JD} = \overline{CD} - \overline{CJ} = \cotg \alpha - 2 \cotg 2\alpha = \tg \alpha.$$

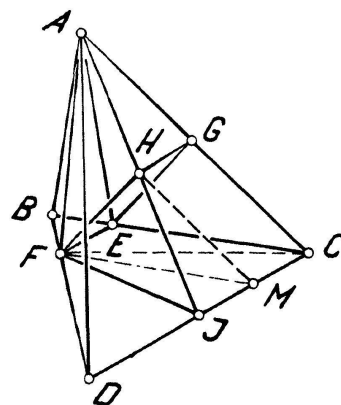


Figure 1

Par conséquent: $\overline{AF} = \overline{FJ} = \overline{JD}$; dièdre $AD = \pi/3$, dièdre $AJ = \pi/2$, dièdre $FD = \pi/2$. Le tétraèdre $AFJD$ est donc un tétraèdre de HILL de première espèce équivalent à un cube. Le polyèdre $AEFCJ$ est équivalent à un cube, comme on le voit en faisant tourner le tétraèdre $FHMJ$ de 180° autour de FH . Par conséquent: $AEFCJ \sim AFJD + AFHJ \sim$ cube

$$\boxed{\left(\alpha, \delta; \frac{\pi}{3}\right) \sim (2\alpha, \delta; \alpha)} \pmod{0}, \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right] \tag{1}$$

2. Considérons encore les deux tétraèdres $(2\alpha, \xi; \pi/2 - \alpha) = ABEF$ et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) = ABCD \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{6}, \sin \xi = \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \quad [\text{fig. 2}]$$

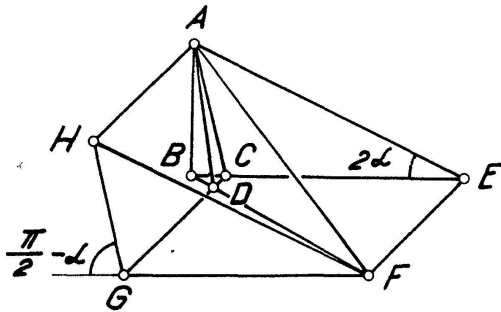


Figure 2

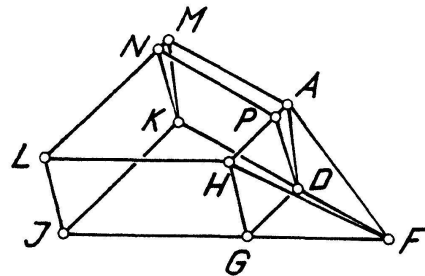


Figure 3

Si $AHCGEF$ est le prisme de base ACE et d'arête EF , on a

$$\left(2\alpha, \xi; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) \sim ACDEF \sim AHCGEF - AHDGF \sim -AHDGF \pmod{0}.$$

Prenons sur FG un point J et sur FD un point K tels que $\overline{JH} = \overline{HF}$ et $\overline{KA} = \overline{AF}$. Ajoutons au polyèdre le prisme $DGJKPHLN$ de base $DGJK$ et d'arête GH et le prisme $DAPKMN$ de base DAP et d'arête DK [fig. 3]

$$FAHMLKJ \sim AHDGF \pmod{0}.$$

Enlevons de ce nouveau polyèdre le polyèdre $FAHKJ$ équivalent à un cube et le prisme $MAKSHR$ [fig. 4]: $AHDGF \sim HSLJR \pmod{0}$.

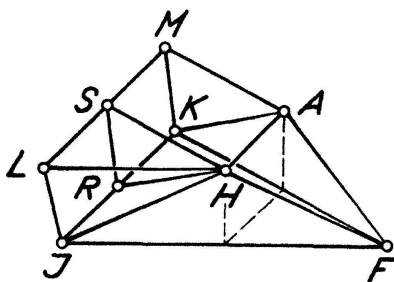


Figure 4

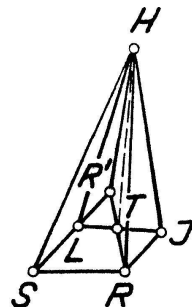


Figure 5

Les dièdres de ce dernier polyèdre ont les valeurs suivantes:

$$\sphericalangle LH = \sphericalangle HJ = \sphericalangle LJ = \sphericalangle SH = \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle LS = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3}; \quad \sphericalangle RH = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\sphericalangle JR = \pi - \sphericalangle JLH - \sphericalangle LHJ = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Comme ce polyèdre, équivalent à $-ACDEF$, vérifie aussi les conditions nécessaires de DEHN pour l'équivalence à un cube, on a la relation

$$\overline{RH} = \overline{LS} + \overline{JR}$$

Le triangle HLJ est isocèle, $\overline{HL} = \overline{HJ}$; désignons par T le milieu de LJ . Faisons enfin tourner le tétraèdre $HTJR$ d'un angle π autour de HT [fig. 5]. Le polyèdre $HSLJR$ se transforme dans le tétraèdre $HR'SR$ pour lequel

$$\overline{SR'} = \overline{SL} + \overline{LR'} = \overline{SL} + \overline{JR} = \overline{RH} = \overline{R'H}, \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3}, \quad \sphericalangle SH = \sphericalangle R'R = \frac{\pi}{2}.$$

$HR'SR$ est donc un tétraèdre de HILL de première espèce, équivalent à un cube. Par conséquent:

$$ACDEF \sim -AHDGF \sim -HSLJR \sim -HR'SR \sim 0 \pmod{0}.$$

Donc

$$\boxed{\left(2\alpha, \xi; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right)} \pmod{0}, \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right] \quad (2)$$

3. Nous avons établi dans un précédent travail que

$$(\overline{\alpha}, \overline{\gamma}; \overline{\eta}_1) - (\overline{\beta}, \overline{\gamma}; \overline{\eta}_2) \sim \left(\overline{\alpha}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta}_2; \overline{\zeta}\right) - \left(\overline{\beta}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta}_1; \overline{\zeta}\right).$$

Par conséquent, des deux relations (1) et (2) découlent les deux relations

$$\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \pmod{0} \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right]$$

et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \alpha; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \pmod{0} \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right].$$

La relation étant aussi vérifiée pour $\pi/6$, on a donc

$$\boxed{\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right)} \pmod{0}, \quad \left[0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right].$$

Nous avons ainsi obtenu trois séries infinies de couples de tétraèdres dont la différence est équivalente à un cube, sans qu'ils soient eux-mêmes en général équivalents à un cube.