Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 5

Artikel: Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Autor: Sydler, J.-P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20714

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XV Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1960

Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod. 0) lorsque leur différence est équivalente à un cube. Nous allons donner des exemples de couples de tétraèdres jouissant de cette propriété.

1. Soit $(\alpha, \beta; \gamma)$ un tétraèdre $ABCD$ tel que: $AB \perp BCD$, $DC \perp CBA$, dièdre $AB = \alpha$, dièdre $CD = \beta$, dièdre $AD = \gamma$; $\overline{AB} = \operatorname{cotg} \alpha$, $\overline{CD} = \operatorname{cotg} \beta$. On a $\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ et $\overline{AD} = \operatorname{tg} \gamma$.

Considérons les deux tétraèdres $(\delta, \alpha; \pi/3) = ABCD$ et $(\delta, 2\alpha; \alpha) = A'B'C'D'$. Comme $\sin \alpha \cdot \sin \delta = 1/2$, nous supposerons $\pi/4 > \alpha > \pi/6$.

Les tétraèdres $(\alpha, \delta; \pi/3)$ et $(2\alpha, \delta; \alpha)$ sont équivalents entre eux (mod. 0).

Montrons d'abord que les conditions nécessaires de DEHN pour l'équivalence sont vérifiées. On a pour les dièdres les relations:

$$\sphericalangle CD = \alpha\,; \quad \sphericalangle C'D' = 2\alpha\,; \quad \sphericalangle A'D' = \alpha\,; \quad \sphericalangle AB = \delta\,, \quad \sphericalangle A'B' = \delta\,,$$

les autres dièdres étant rationnels en π. Il faut donc que les longueurs vérifient les relations:

$$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'}\,; \quad \overline{AB} = \overline{A'B'}\,,$$

relations qui sont effectivement remplies puisque

$$2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'} = 2 \operatorname{cotg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \alpha = \overline{CD}\,;$$

$$\overline{AB} = \operatorname{cotg} \delta = \overline{A'B'}\,.$$

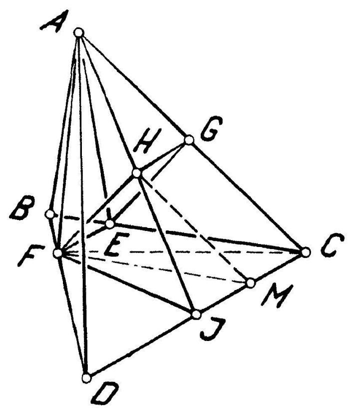

Figure 1

Montrons maintenant que l'équivalence (mod. 0) a bien lieu. Enlevons du tétraèdre $ABCD$ le tétraèdre $A'B'C'D'$ de façon que $A' = A$, $B' = B$, $C' = E$ sur BC, $D' = F$ sur BD [fig. 1].

Menons par E et par F les perpendiculaires au plan ACD et soient G et H leurs pieds. Traçons encore la droite AH qui coupe CD en J et soit enfin M le milieu de JC.

Comme $\sphericalangle AEC = \pi - 2\alpha$ et $\sphericalangle ACB = \alpha$, la droite EG est la bissectrice de AEC et la médiatrice de AC. Le triangle AEC est isocèle, le plan $GEFH$ est le plan médiateur de AC, et l'on a $\overline{AF} = \overline{FC} = \operatorname{tg} \alpha$. Comme G est au milieu de AC, $\overline{GH} = \overline{CM} = \overline{MJ}$ et d'autre part, $\overline{GH} = \overline{FE} = \operatorname{cotg} 2\alpha$. On a donc:

$$\overline{FC} = \overline{FJ} = \operatorname{tg} \alpha\,; \quad \overline{JD} = \overline{CD} - \overline{CJ} = \operatorname{cotg} \alpha - 2 \operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha\,.$$

Par conséquent: $\overline{AF} = \overline{FJ} = \overline{JD}$; dièdre $AD = \pi/3$, dièdre $AJ = \pi/2$, dièdre $FD = \pi/2$. Le tétraèdre $AFJD$ est donc un tétraèdre de HILL de première espèce équivalent à un cube. Le polyèdre $AEFCJ$ est équivalent à un cube, comme on le voit en faisant tourner le tétraèdre $FHMJ$ de 180° autour de FH. Par conséquent: $AEFCD \sim AFJD + AFECD \sim$ cube

$$\boxed{\left(\alpha, \delta; \frac{\pi}{3}\right) \sim (2\,\alpha, \delta;\ \alpha)} \ (\text{mod. } 0)\,, \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right] \tag{1}$$

2. Considérons encore les deux tétraèdres $(2\,\alpha, \xi; \pi/2 - \alpha) = ABEF$ et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) = ABCD \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{6}, \sin \xi = \frac{1}{2 \cos \alpha}\right) \qquad \text{[fig. 2)}$$

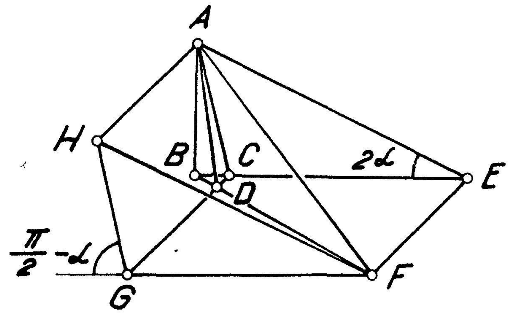

Figure 2

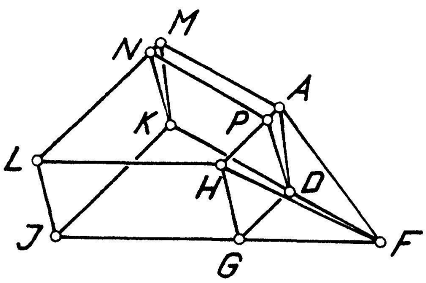

Figure 3

Si $AHCGEF$ est le prisme de base ACE et d'arête EF, on a

$$\left(2\,\alpha, \xi; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) \sim ACDEF \sim AHCGEF - AHDGF \sim$$
$$- AHDGF \ (\text{mod. } 0)\,.$$

Prenons sur FG un point J et sur FD un point K tels que $\overline{JH} = \overline{HF}$ et $\overline{KA} = \overline{AF}$. Ajoutons au polyèdre le prisme $DGJKPHLN$ de base $DGJK$ et d'arête GH et le prisme $DAPKMN$ de base DAP et d'arête DK [fig. 3]

$$FAHMLKJ \sim AHDGF \quad (\text{mod. } 0).$$

Enlevons de ce nouveau polyèdre le polyèdre $FAHKJ$ équivalent à un cube et le prisme $MAKSHR$ [fig. 4]: $AHDGF \sim HSLJR$ (mod. 0).

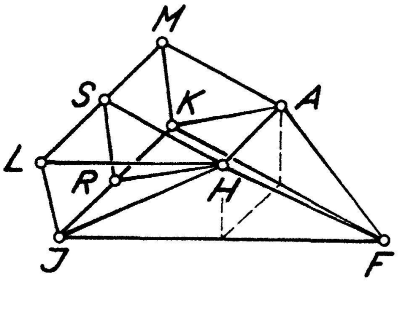

Figure 4

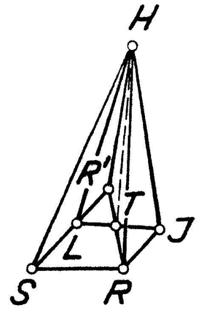

Figure 5

Les dièdres de ce dernier polyèdre ont les valeurs suivantes:

$$\sphericalangle LH = \sphericalangle HJ = \sphericalangle LJ = \sphericalangle SH = \frac{\pi}{2}$$

$$\sphericalangle LS = \frac{\pi}{2} - \alpha ; \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3} ; \quad \sphericalangle RH = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\sphericalangle JR = \pi - \sphericalangle JLH - \sphericalangle LHJ = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha .$$

Comme ce polyèdre, équivalent à $-ACDEF$, vérifie aussi les conditions nécessaires de Dehn pour l'équivalence à un cube, on a la relation

$$\overline{RH} = \overline{LS} + \overline{JR}$$

Le triangle HLJ est isocèle, $\overline{HL} = \overline{HJ}$; désignons par T le milieu de LJ. Faisons enfin tourner le tétraèdre $HTJR$ d'un angle π autour de HT [fig. 5]. Le polyèdre $HSLJR$ se transforme dans le tétraèdre $HR'SR$ pour lequel

$$\overline{SR'} = \overline{SL} + \overline{LR'} = \overline{SL} + \overline{JR} = \overline{RH} = \overline{R'H} , \quad \sphericalangle SR = \frac{\pi}{3} , \quad \sphericalangle SH = \sphericalangle R'R = \frac{\pi}{2} .$$

$HR'SR$ est donc un tétraèdre de Hill de première espèce, équivalent à un cube. Par conséquent:

$$ACDEF \sim - AHDGF \sim - HSLJR \sim - HR'SR \sim 0 \quad (\text{mod. } 0) .$$

Donc

$$\boxed{\left(2\alpha, \xi ; \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi ; \frac{\pi}{3}\right)} \quad (\text{mod. } 0) , \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right] \qquad (2)$$

3. Nous avons établi dans un précédent travail que

$$\overline{(\alpha, \gamma ; \eta_1)} - \overline{(\beta, \gamma ; \eta_2)} \sim \overline{\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \eta_2 ; \zeta\right)} - \overline{\left(\beta, \frac{\pi}{2} - \eta_1 ; \zeta\right)} .$$

Par conséquent, des deux relations (1) et (2) découlent les deux relations

$$\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha ; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6} ; \omega\right) \quad (\text{mod. } 0) \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right]$$

et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \alpha ; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6} ; \omega\right) \quad (\text{mod. } 0) \quad \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right] .$$

La relation étant aussi vérifiée pour $\pi/6$, on a donc

$$\boxed{\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha ; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6} ; \omega\right)} \quad (\text{mod. } 0) , \quad \left[0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right] .$$

Nous avons ainsi obtenu trois séries infinies de couples de tétraèdres dont la différence est équivalente à un cube, sans qu'ils soient eux-mêmes en général équivalents à un cube.

J.-P. Sydler, Zürich