Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1960)

Heft: 5

Artikel: Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Autor: Sydler, J.-P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20714

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

> Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band XV

Nr. 5

Seiten 97-120

Basel, 10. September 1960

Exemples de tétraèdres équivalents (mod. 0)

Deux polyèdres sont dits équivalents (mod. 0) lorsque leur différence est équivalente à un cube. Nous allons donner des exemples de couples de tétraèdres jouissant de cette propriété.

1. Soit $(\alpha, \beta; \gamma)$ un tétraèdre ABCD tel que: $AB \perp BCD$, $DC \perp CBA$, dièdre $AB = \alpha$, dièdre $CD = \beta$, dièdre $AD = \gamma$; $\overline{AB} = \cot \alpha$, $\overline{CD} = \cot \beta$. On a $\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$ et $\overline{AD} = \tan \gamma$.

Considérons les deux tétraèdres $(\delta, \alpha; \pi/3) = ABCD$ et $(\delta, 2\alpha; \alpha) = A'B'C'D'$. Comme sin $\alpha \cdot \sin \delta = 1/2$, nous supposerons $\pi/4 > \alpha > \pi/6$.

Les tétraèdres $(\alpha, \delta; \pi/3)$ et $(2\alpha, \delta; \alpha)$ sont équivalents entre eux (mod. 0).

Montrons d'abord que les conditions nécessaires de Dehn pour l'équivalence sont vérifiées. On a pour les dièdres les relations:

$$\not \subset CD = \alpha$$
; $\not \subset C'D' = 2\alpha$; $\not \subset A'D' = \alpha$; $\not \subset AB = \delta$, $\not \subset A'B' = \delta$,

les autres dièdres étant rationnels en π . Il faut donc que les longueurs vérifient les relations:

$$\overline{CD} = 2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'}; \quad \overline{AB} = \overline{A'B'},$$

relations qui sont effectivement remplies puisque

$$2 \cdot \overline{C'D'} + \overline{A'D'} = 2 \cot 2\alpha + \tan \alpha = \cot \alpha = \overline{CD};$$

$$\overline{AB} = \cot \beta = \overline{A'B'}.$$

Montrons maintenant que l'équivalence (mod. 0) a bien lieu. Enlevons du tétraèdre ABCD le tétraèdre A'B'C'D' de façon que A'=A, B'=B, C'=E sur BC, D'=F sur BD [fig. 1].

Menons par E et par F les perpendiculaires au plan ACD et soient G et H leurs pieds. Traçons encore la droite AH qui coupe CD en I et soit enfin M le milieu de IC.

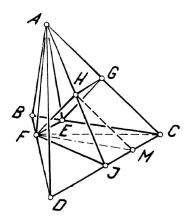


Figure 1

Comme $\stackrel{\checkmark}{\swarrow} AEC = \pi - 2 \alpha$ et $\stackrel{\checkmark}{\swarrow} ACB = \alpha$, la droite EG est la bissectrice de AEC et la médiatrice de AC. Le triangle AEC est isocèle, le plan GEFH est le plan médiateur de AC, et l'on a $\overline{AF} = \overline{FC} = \operatorname{tg} \alpha$. Comme G est au milieu de AC, $\overline{GH} = \overline{CM} = \overline{MJ}$ et d'autre part, $\overline{GH} = \overline{FE} = \operatorname{cotg} 2 \alpha$. On a donc:

$$\overline{FC} = \overline{FJ} = \operatorname{tg} \alpha$$
; $\overline{JD} = \overline{CD} - \overline{CJ} = \operatorname{cotg} \alpha - 2\operatorname{cotg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha$.

Par conséquent: $\overline{AF} = \overline{FJ} = \overline{JD}$; dièdre $AD = \pi/3$, dièdre $AJ = \pi/2$, dièdre $FD = \pi/2$. Le tétraèdre AFJD est donc un tétraèdre de HILL de première espèce équivalent à un cube. Le polyèdre AEFCJ est équivalent à un cube, comme on le voit en faisant tourner le tétraèdre FHMJ de 180° autour de FH. Par conséquent: $AEFCD \sim AFJD + AFECD \sim$ cube

$$\left(\alpha, \delta; \frac{\pi}{3}\right) \sim (2 \alpha, \delta; \alpha) \pmod{0}, \quad \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right]$$
 (1)

2. Considérons encore les deux tétraèdres $(2 \alpha, \xi; \pi/2 - \alpha) = ABEF$ et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \xi; \frac{\pi}{3}\right) = ABCD \left(\alpha < \frac{\pi}{6}, \sin \xi = \frac{1}{2\cos \alpha}\right)$$
 [fig. 2)

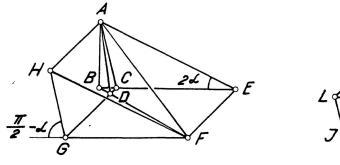


Figure 2

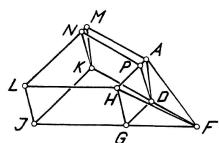


Figure 3

Si AHCGEF est le prisme de base ACE et d'arête EF, on a

$$\left(2\alpha,\xi;\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\xi;\frac{\pi}{3}\right)\sim ACDEF\sim AHCGEF-AHDGF\sim$$

$$-AHDGF\pmod{0}.$$

Prenons sur FG un point J et sur FD un point K tels que $\overline{JH} = \overline{HF}$ et $\overline{KA} = \overline{AF}$. Ajoutons au polyèdre le prisme DGJKPHLN de base DGJK et d'arête GH et le prisme DAPKMN de base DAP et d'arête DK [fig. 3]

$$FAHMLKJ \sim AHDGF \pmod{0}$$
.

Enlevons de ce nouveau polyèdre le polyèdre FAHKJ équivalent à un cube et le prisme MAKSHR [fig. 4]: $AHDGF \sim HSLJR$ (mod. 0).

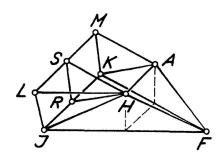


Figure 4



Figure 5

Les dièdres de ce dernier polyèdre ont les valeurs suivantes:

$$\angle LH = \angle HJ = \angle LJ = \angle SH = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle LS = \frac{\pi}{2} - \alpha \; ; \quad \angle SR = \frac{\pi}{3} \; ; \quad \angle RH = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\angle JR = \pi - \angle JLH - \angle LHJ = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha \; .$$

Comme ce polyèdre, équivalent à -ACDEF, vérifie aussi les conditions nécessaires de Dehn pour l'équivalence à un cube, on a la relation

$$\overline{RH} = \overline{LS} + \overline{JR}$$

Le triangle HLJ est isocèle, $\overline{HL} = \overline{HJ}$; désignons par T le milieu de LJ. Faisons enfin tourner le tétraèdre HTJR d'un angle π autour de HT [fig. 5]. Le polyèdre HSLJR se transforme dans le tétraèdre HR'SR pour lequel

HR'SR est donc un tétraèdre de HILL de première espèce, équivalent à un cube. Par conséquent:

$$ACDEF \sim -AHDGF \sim -HSLJR \sim -HR'SR \sim 0 \pmod{0}$$

Donc

$$\overline{\left(2\alpha,\xi;\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sim\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\xi;\frac{\pi}{3}\right)} \pmod{0}, \quad \left[\alpha<\frac{\pi}{6}\right]$$
(2)

3. Nous avons établi dans un précédent travail que

$$(\overline{\alpha}, \overline{\gamma}; \overline{\eta_1}) - (\overline{\beta}, \overline{\gamma}; \overline{\eta_2}) \sim (\overline{\alpha}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta_2}; \overline{\zeta}) - (\overline{\beta}, \frac{\pi}{2} - \overline{\eta_1}; \overline{\zeta}).$$

Par conséquent, des deux relations (1) et (2) découlent les deux relations

$$\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \pmod{0} \left[\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{6}\right]$$

et

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \alpha; \omega\right) \sim \left(2\alpha, \frac{\pi}{6}; \omega\right) \pmod{0} \left[\alpha < \frac{\pi}{6}\right].$$

La relation étant aussi vérifiée pour $\pi/6$, on a donc

$$\left[\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha; \omega \right) \sim \left(2 \alpha, \frac{\pi}{6}; \omega \right) \right] \pmod{0}, \quad \left[0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \right].$$

Nous avons ainsi obtenu trois séries infinies de couples de tétraèdres dont la différence est équivalente à un cube, sans qu'ils soient eux-mêmes en général équivalents à un cube.

J.-P. Sydler, Zürich