

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'où

$$\sum_{1 \leq k < \frac{p-1}{2}} (k+1) \equiv \frac{(p-3)(p+3)}{8} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Comme  $p \not\equiv 3 \pmod{4}$ , on a  $p+3 \equiv 0 \pmod{8}$ , c'est-à-dire  $p \equiv 5 \pmod{8}$ .

Il est à remarquer que la condition du problème n'est pas remplie, lorsque  $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$  ou  $\left(\frac{-23}{p}\right) = -1$ . En effet, dans le premier cas la congruence  $x(x+1) \equiv 1 \pmod{p}$  est résoluble et dans le second cas (en vertu du théorème de VORONOÏ-SKOLEM) la congruence  $x(x+1)(x+2) \equiv 1 \pmod{p}$  est résoluble. On a alors

$$(x+1)! \equiv (x-1)! \pmod{p} \text{ ou bien } (x+2)! \equiv (x-1)! \pmod{p}.$$

Les seuls nombres premiers  $p < 1000$  pour lesquels on a  $p \equiv 5 \pmod{8}$ ,  $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$  et  $\left(\frac{-23}{p}\right) = 1$  sont les suivants: 13, 173, 197, 277, 317, 397, 653, 853, 877, 997. Mais comme on peut vérifier aisément à l'aide du «Canon arithmeticus» on a  $9! \equiv 4! \pmod{13}$ ,  $15! \equiv 10! \pmod{173}$ ,  $9! \equiv 3! \pmod{197}$ ,  $43! \equiv 17! \pmod{277}$ ,  $21! \equiv 10! \pmod{317}$ ,  $45! \equiv 36! \pmod{397}$ ,  $19! \equiv 1 \equiv 651! \pmod{653}$ ,  $38! \equiv 30! \pmod{853}$ ,  $100! \equiv 84! \pmod{877}$  et  $72! \equiv 54! \pmod{997}$ .

Il en résulte que la condition du problème n'est remplie par aucun nombre premier  $p > 5$  et  $< 1000$ .

B. ROKOWSKA, Wrocław et A. SCHINZEL, Varsovie

## Aufgaben

**Aufgabe 352.** Es sei  $O_1$  das Orthozentrum des dem Kreis  $k$  mit dem Radius  $r$  einbeschriebenen Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ,  $O_2$  das Orthozentrum des Dreiecks  $B_1 B_2 B_3$ , das auch dem Kreise  $k$  einbeschrieben ist. Man beweise

$$\overline{O_1 O_2} < 4r + u,$$

wo  $u = \min A_i B_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

E. JUCOVIČ, Prešov (CSR)

**Aufgabe 353.** Es sei  $T_1$  der Schwerpunkt des dem Kreise  $k$  mit dem Radius  $r$  einbeschriebenen Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ ,  $T_2$  der Schwerpunkt des ebenfalls  $k$  einbeschriebenen Dreiecks  $B_1 B_2 B_3$ . Man beweise

$$\overline{T_1 T_2} < \frac{4r + u}{3},$$

wo  $u = \min A_i B_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

E. JUCOVIČ, Prešov (CSR)

*Lösung und Verallgemeinerung:* Es sei  $T_1$  der Schwerpunkt des der  $n$ -dimensionalen Kugel  $k(M, r)$  einbeschriebenen Simplex  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ),  $T_2$  der Schwerpunkt des ebenfalls  $k$  einbeschriebenen Simplex  $B_j$  ( $j = 1, \dots, n+1$ ). Dann gilt

$$\overline{T_1 T_2} < \frac{2nr + u}{n+1}, \quad (1)$$

wo  $u = \min \overline{A_i B_j}$  ( $i, j = 1, \dots, n+1$ ).

*Beweis:* Sei  $A_k$  ein beliebig gewählter fester Eckpunkt des Simplex  $A_i$ . Der Schwerpunkt  $S_k$  des dem Eckpunkte  $A_k$  gegenüberliegenden  $(n-1)$ -dimensionalen Grenzraumes ist ein innerer Punkt von  $k$ . Der Simplexschwerpunkt  $T_1$  teilt die Strecke  $\overline{A_k S_k}$  im Verhältnis  $n:1$ . Die  $n$ -dimensionale Pflanzkugel des Simplexschwerpunktes  $T_1$  ist also eine  $n$ -dimensionale Kugel  $k_1(M_1, r_1)$ , welche mit  $k$  in einer Homothetie steht, deren Mittelpunkt  $A_k$  ist, und deren Charakteristik  $n:(n+1)$  beträgt. Hieraus folgt, dass  $M_1$  die Strecke  $\overline{A_k M}$  im Verhältnis  $n:1$  teilt, und  $r_1 = nr/(n+1)$  ist.

Sei  $B_l$  ein beliebiger fester Eckpunkt des gleichfalls in  $k$  eingeschriebenen anderen Simplex. Wie oben folgt, dass die  $n$ -dimensionale Pflerchkugel  $k_2(M_2, r_2)$  des Simplexschwerpunktes  $T_2$  mit  $k$  in einer Homothetie mit dem Mittelpunkt  $B_l$  und mit der Charakteristik  $n : (n + 1)$  steht. Der Punkt  $M_2$  teilt also die Strecke  $\overline{B_l M}$  im Verhältnis  $n : 1$ , und es ist  $r_2 = r_1$ . Dann sind aber die Dreiecke  $MA_k B_l$  und  $MM_1 M_2$  homothetisch mit dem Mittelpunkt  $M$ , und mit der Charakteristik  $(n + 1) : 1$ . Hieraus folgt, dass  $\overline{M_1 M_2} = \overline{A_k B_l} / (n + 1) = \overline{A_i B_j} / (n + 1)$ . Die zwei  $n$ -dimensionalen Pflerchkugeln  $k_1$  und  $k_2$  sind also mit einer  $n$ -dimensionalen Kugel vom Durchmesser

$$d = 2 r n / (n + 1) + \overline{A_i B_j} / (n + 1)$$

überdeckbar, woraus die Behauptung (1) unmittelbar folgt. Der Fall  $n = 2$  gibt die Lösung der Aufgabe Nr. 353.

Seien nun  $A_i$  und  $B_j$  in  $k$  eingeschriebene orthozentrische Simplexe, mit den Orthozentren  $O_1$  und  $O_2$ , so gilt

$$\overline{O_1 O_2} < \frac{2 n r + u}{n - 1} . \quad (2)$$

*Beweis:* Der Umkugelmittelpunkt  $M$ , der Schwerpunkt  $T$  und das Orthozentrum  $O$  eines orthozentrischen  $n$ -dimensionalen Simplex liegen auf einer Geraden (verallgemeinerte Eulergerade), so dass  $T$  die Strecke  $\overline{MO}$  im Verhältnis  $(n - 1) : 2$  teilt. Hieraus folgt, dass die Dreiecke  $MO_1 O_2$  und  $MT_1 T_2$  in einer Homothetie stehen mit dem Mittelpunkt  $M$  und mit der Charakteristik  $(n + 1) : (n - 1)$ , woraus  $\overline{T_1 T_2} = (n - 1) \overline{O_1 O_2} / (n + 1)$ . Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man (2). Der Fall  $n = 2$  gibt die Lösung der Aufgabe Nr. 352. J. SCHOPP, Budapest

2. Lösung: Die Ebene der Dreiecke werde als Gaußsche Zahlenebene gedacht, deren Nullpunkt im gemeinsamen Umkreismittelpunkt beider Dreiecke liegt. Der Einfachheit halber wird jeder Punkt mit der ihm zugeordneten komplexen Zahl gleich bezeichnet. Es bedeutet ferner keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Numerierung in beiden Dreiecken so einzurichten, dass  $\overline{A_1 B_1} = u$  gilt. Die Orthozentren der Dreiecke genügen den Gleichungen

$$\text{bzw.} \quad \left. \begin{aligned} (O_1 - A_i)(A_k - A_l) &= 0 \\ (O_2 - B_i)(B_k - B_l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad i, k, l = 1, 2, 3 \quad i \neq k \neq l \neq i .$$

Diese Gleichungen werden durch den Ansatz

$$O_1 = \sum_{i=1}^3 A_i \quad \text{bzw.} \quad O_2 = \sum_{i=1}^3 B_i$$

befriedigt, da  $A_i^2 = B_i^2 = r^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gilt. Für den Abstand der Orthozentren findet man

$$\overline{O_1 O_2} = \left| O_1 - O_2 \right| = \left| \sum_{i=1}^3 (A_i - B_i) \right| \leq \sum_{i=1}^3 \left| A_i - B_i \right| .$$

Da die erste Differenz durch  $u$  und jede weitere durch den Durchmesser  $2r$  des Umkreises majorisiert wird, folgt unmittelbar die behauptete Ungleichung.

Unter denselben Voraussetzungen wie in Nr. 352 findet man für die Schwerpunkte

$$T_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 A_i \quad \text{bzw.} \quad T_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 B_i .$$

Somit folgt für den Abstand der Schwerpunkte beider Dreiecke

$$\overline{T_1 T_2} = \left| T_1 - T_2 \right| = \frac{1}{3} \left| \sum_{i=1}^3 (A_i - B_i) \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left| A_i - B_i \right| ,$$

woraus wie in Nr. 352 unmittelbar die behauptete Ungleichung folgt. H. VÖGLER, Wien

Weitere Lösungen sandten E. HERRMANN (Porz a. Rhein), M. KORECZ (Budapest), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen, Deutschland).

**Aufgabe 354.** Man beweise, dass ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass zwei primitive binäre quadratische Formen mit ganzrationalen Koeffizienten und gleicher Diskriminante zu derselben Formenklasse im weiteren Sinne gehören, die gleichzeitige Darstellbarkeit einer ungeraden Primzahl ist. J. PIEHLER, Leuna

*Lösung:* Wir bezeichnen eine primitive binäre quadratische Form

$$F = ax^2 + bxy + cy^2$$

im folgenden mit  $(a, b, c)$ . Die Äquivalenz zweier Formen wird im weiteren Sinn, also mit der Substitutionsdeterminante  $\pm 1$  verstanden. Die betrachteten Formen sollen alle die gleiche Diskriminante  $D$  haben. Dabei können wir  $D \neq 0$  voraussetzen, denn alle Formen mit  $D = 0$  sind der Form  $x^2$  äquivalent, gehören also alle einer Klasse an.

a) Das Kriterium ist notwendig: Wir benützen den Satz, dass jede Form mit  $D \neq 0$  (sogar unendlich viele) Primzahlen darstellt. (Für den Beweis siehe H. WEBER, Math. Annalen 20, 301, 1882.) Weiter stellen bekanntlich äquivalente Formen die gleichen Zahlen dar.

b) Das Kriterium ist hinreichend: Ist die positive ganze Zahl  $p$  durch die Form  $F = (a, b, c)$  eigentlich darstellbar, dann gibt es zu  $F$  eine äquivalente Form  $(p, l, m)$  mit  $-p < l \leq p$  (zum Beweis siehe z. B. SCHOLZ-SCHOENBERG, *Einführung in die Zahlentheorie*, Sammlung Götschen, Band 1131, Seite 104). Ist  $l < 0$ , so wenden wir auf  $(p, l, m)$  die Substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

an, so dass wir eine Form  $F_0 = (p, k, m)$  mit  $0 \leq k \leq p$  erhalten. Jetzt sei  $p$  eine ungerade Primzahl, die durch die Formen  $F$  und  $F'$  dargestellt wird. Die Diskriminanten von  $F$  und  $F'$  sind nach Voraussetzung gleich, also sind auch diejenigen von  $F_0 = (p, k, m)$  und  $F'_0 = (p, k', m')$  gleich, das heisst

$$k^2 - 4pm = k'^2 - 4pm',$$

also

$$(k + k')(k - k') = 4p(m - m'), \quad \text{wo } 0 \leq k + k' \leq 2p, \quad |k - k'| < 2p.$$

Da eine der Klammern auf der linken Seite durch  $2p$  teilbar sein muss, folgt hieraus  $k = k'$  und damit auch  $m = m'$ . Also ist  $F_0 = F'_0$  und die Formen  $F$  und  $F'$  sind äquivalent, wie zu beweisen war.

Es ist für das Kriterium übrigens gar nicht erforderlich, die Primzahl als ungerade voranzusetzen. Wird nämlich 2 durch die Form  $F = (a, b, c)$  dargestellt, dann gibt es nach dem oben benutzten Satz dazu eine äquivalente Form  $F_0 = (2, k, m)$ , wobei  $0 \leq k \leq 2$ . Die Formen  $(2, 0, m_1)$ ,  $(2, 1, m_2)$  und  $(2, 2, m_3)$  haben aber verschiedene Diskriminanten, welche Werte  $m_1, m_2, m_3$  auch haben mögen. J. FIEDLER, Regensburg

**Aufgabe 355.** Put

$$(\operatorname{sech} x)^k = \sum E_{2m}^{(k)} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Show that for  $k$  odd (positive or negative)

$$E_{2m}^{(k)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}m(k+1)} \pmod{4}. \quad (1)$$

The case  $k = 1$  is familiar. Show also that for  $k$  even

$$E_{2m}^{(k)} \equiv 0 \pmod{4} \quad (m > 1). \quad (2)$$

L. CARLITZ, Durham, N.C. (USA)

*Solution by the proposer:* If  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/n!$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n/n!$  are two series with integral coefficients, the statement

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n/n! \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n/n! \pmod{m}$$

is equivalent to

$$a_n \equiv b_n \pmod{n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Thus since

$$\cosh^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

we have

$$\cosh^2 x \equiv 1 + x^2 \pmod{4},$$

and therefore

$$\cosh^4 x \equiv 1 \pmod{4}.$$

It follows that

$$\operatorname{sech}^2 x \equiv 1 + x^2, \quad \operatorname{sech}^4 x \equiv 1 \pmod{4}.$$

This evidently proves (2).

Next  $k \equiv 3 \pmod{4}$ , then,

$$(\operatorname{sech} x)^k \equiv (\operatorname{sech} x)^3 \equiv \cosh x \pmod{4},$$

so that

$$E_{2m}^{(k)} \equiv 1 \pmod{4}, \tag{3}$$

while for  $k \equiv 1 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sech} x)^k &\equiv \operatorname{sech} x \equiv (\cosh x)^3 \\ &\equiv (1 + x^2) \cosh x \pmod{4}. \end{aligned}$$

This gives

$$E_{2m}^{(k)} \equiv 1 + 2m(2m-1) \equiv (-1)^m \pmod{4}. \tag{4}$$

Clearly (3) and (4) imply (1).

### Neue Aufgaben

383. Die Verbindungsgerade eines festen Punktes  $A$  mit der Mitte  $M$  eines Kreises  $k$  schneide  $k$  in den Punkten  $P$  und  $Q$ . Durchläuft  $k$  ein hyperbolisches Kreisbüschel, so erfüllen bekanntlich die Punkte  $P, Q$  im allgemeinen eine monozirkuläre Kubik vom Geschlecht Null mit drei im Endlichen liegenden reellen Scheiteln. Wie kann man für jene dieser «Fokalen», die eine Symmetrieachse besitzen, die Scheitelkrümmungskreise einfach konstruieren, und wo muss der Aufpunkt  $A$ , der zugleich der singuläre Brennpunkt der Kubik ist, gewählt werden, damit die drei Scheitelkrümmungskreise kongruent werden?  
R. BEREIS, Dresden

384.  $P_1, P_2, \dots, P_n$  seien  $n$  Punkte der Kurve

$$y = x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_n x + a_{n+1},$$

in denen die Tangenten den gleichen Richtungsfaktor  $k$  haben. Es soll gezeigt werden, dass die zu verschiedenen Werten von  $k$  gehörenden Punktaggregate  $P_1, P_2, \dots, P_n$  denselben Schwerpunkt besitzen.  
W. JÄNICHEN, Berlin

385. Gegeben sind drei Kreise in drei verschiedenen, zu einander parallelen Ebenen. Gesucht wird ein Punkt  $Z$  derart, dass die Projektionen der drei Kreise aus  $Z$  sich gegenseitig berühren.  
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

386. Let  $p$  be a prime number,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $(a, p) = 1$ ,  $r$  denote a quadratic residue and  $n$  a quadratic non-residue of  $p$ . Prove that for each  $a$  the congruence  $r + n \equiv a \pmod{p}$  has exactly  $(p-1)/4$  solutions  $r, n$  ( $1 \leq r, n \leq p-1$ ).

A. MAKOWSKI, Warszawa

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Eine Parabel geht durch den festen Punkt  $P$  und besitzt die feste Scheiteltangente  $t_0$ . Welches ist der geometrische Ort ihres Brennpunkts?  
 ► Parabel mit dem Brennpunkt  $P$  und der Scheiteltangente  $t_0$ .
2. Ein Kreis geht durch den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems und durch einen festen Punkt  $P$ . Er schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $A$  und  $B$ . Die Gerade  $AB$  hüllt eine Parabel ein.  
 ►  $P$  ist Brennpunkt, und eine Diagonale des Koordinatenrechtecks von  $P$  ist Scheiteltangente.
3. Das Verhältnis zweier senkrecht aufeinanderstehender Parabelsehnen durch den Scheitelpunkt ist gleich der dritten Potenz des Tangens des Winkels, den eine dieser Sehnen mit der Achse bildet.
4. Bestimme den Punkt  $P(x; y)$  der Parabel  $y = ax^2$ , von dem aus die Parabelsehne  $P_1(u_1; v_1)$ ,  $P_2(u_2; v_2)$  unter einem möglichst grossen oder einem möglichst kleinen Winkel gesehen wird.  
 ►  $x = -\frac{u_1 + u_2}{2}$ , unabhängig von  $a$ !

Für den extremen Sehwinkel findet man

$$\varepsilon = \operatorname{arctg} a \frac{u_1 - u_2}{2} - \operatorname{arctg} a \frac{u_2 - u_1}{2},$$

das heisst: die Winkelhalbierende von  $\varepsilon$  ist im Fall des Minimums parallel der  $y$ -Achse, im Fall des Maximums parallel der  $x$ -Achse.

5. Löse auf graphischem Wege das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} z = 0,25 [(x - 8)^2 + (y - 7)^2] \\ x^2 + y^2 - 22x - 14y + 154 = 0 \\ 3x + 4z - 48 = 0 \end{array} \right\}$$

► Schnitt eines Rotationsparaboloids, eines geraden Kreiszylinders und einer Ebene. Die Schnittfigur von Paraboloid und Zylinder liegt in einer zweitprojizierenden Ebene, ihr Grundriss ist ein Kreis.

$$x = 9,889; \quad y_1 = 10,843; \quad y_2 = 3,157; \quad z = 4,583.$$

## Literaturüberschau

W. LIETZMANN: *Aus meinen Lebenserinnerungen*

114 Seiten mit Portrait. Broschiert DM 6.80. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1960

Ehe das vom Verein Schweizerischer Mathematiklehrer herausgegebene Unterrichtswerk erschien, war der «LIETZMANN» für viele unserer Gymnasiasten ein bekannter Begriff, mussten sie doch «aus ihm» ihre Algebra- und Geometrie-Aufgaben machen. Spätere Generationen haben sich an WALTHER LIETZMANN'S Buch *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen* erfreut und aus der von ihm herausgegebenen Mathematisch-Physikalischen Bibliothek auf eigene Faust zusätzliche Belehrung geschöpft. Aber auch manchem schweizerischen Mathematiklehrer haben diese und andere Werke LIETZMANN'S, seine Methodikbände und vor allem die von ihm seit 1914 redigierte