Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Bei der Abbildung Ω geht ein Kreis k in einen Kreis k^* über und dieser wiederum wird durch die normale Affinität Φ_n im allgemeinen auf eine Ellipse $\bar{k}$ abgebildet ($\bar{k}$ ist ein Kreis, wenn das Affinitätsverhältnis von Φ_n den Wert ± 1 hat). Fassen wir die Kreise als spezielle Ellipsen auf, so ist jetzt der folgende Satz bewiesen:

Satz: *Das perspektiv-affine Bild eines Kreises ist stets eine Ellipse.*

Mit diesem Ergebnis ist jetzt die Grenzstelle zwischen der metrischen und der affinen Geometrie der Ellipse überschritten. Hier kann die Behandlung der affinen Eigenschaften der Kurve einsetzen, wie sie sich etwa in der darstellenden Geometrie in Verbindung mit der Parallelprojektion aufdrängt.

Abschliessend sei noch bemerkt, dass die Idee der Aufspaltung einer beliebigen perspektiven Affinität in eine Drehstreckung und in eine normale Affinität auch dem von MÜLLER und KRUPPA in [9] angegebenen Äquivalenzbeweis zugrunde liegt. Die beiden Teilabbildungen treten aber dort nicht offen hervor, so dass die Diskussion ganz im Rahmen statischer Betrachtungen abläuft. M. JEGER, Luzern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. STRUBECKER, *Vorlesungen über darstellende Geometrie* (Göttingen 1958).
[2] H. FLÜCKIGER, *Leitfaden der darstellenden Geometrie*, 2. Aufl. (Zürich 1947), S. 43.
[3] E. SALKOWSKI, *Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichtes* (Leipzig, Berlin 1924).
[4] WEBER-WELLSTEIN, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. II (Leipzig 1905), S. 501.
[5] C. BINDSCHEDLER, *Zur Elementargeometrie der Ellipse*, El. Math. *3*, 105–111 (1948).
[6] M. JEGER, *Konstruktive Abbildungsgeometrie.* Ein Beitrag zur Neuorientierung des Geometrieunterrichtes auf der Mittelschule, 2. Aufl. (Luzern 1959), § 7.
[7] B. L. VAN DER WAERDEN, *Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht*, El. Math. *12*, 1–8 (1957).
[8] J. BRANKAMP, *Die Einführung der Logarithmen als Flächeninhalt unter der Hyperbel* $y = 1/x$, Der Mathematikunterricht, Beiträge zu seiner wissenschaftlichen und methodischen Gestaltung, Heft 2 (1957).
[9] E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 5. Aufl. (Wien 1948), S. 99.

Ungelöste Probleme

Nr. 34. Es sei S die gewöhnliche Kugelfläche, und $p \in S$ bezeichne einen variablen Punkt. Weiter sollen $p_i \in S$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Eckpunkte eines der Kugelfläche einbeschriebenen Rechtecks bedeuten, wobei sich p_1 und p_3 bzw. auch p_2 und p_4 diagonal gegenüberliegen sollen.

Ist $\Phi(p)$ eine reellwertige stetige Funktion auf S, so gibt es eine Spiegelung σ an einer durch den Mittelpunkt von S hindurchgehenden Ebene derart, dass die Bedingungen

$$\Phi(\sigma p_1) = \Phi(\sigma p_3)\,; \quad \Phi(\sigma p_2) = \Phi(\sigma p_4) \tag{a}$$

erfüllt werden; hierbei bezeichnet σp den Bildpunkt zu p.

Diese Aussage lässt sich nach der vom Unterzeichneten kürzlich näher erläuterten Methode leicht nachweisen[1]).

Werden anstelle der Spiegelungen σ aber Drehungen ϱ um den Mittelpunkt von S zugelassen, so bestehen Möglichkeiten, wesentlich mehr als (a) auszusagen. Nach Ergebnissen von DYSON und LIVESAY[2]) kann für ein Rechteck, das einem Grosskreis von S einbeschrieben ist, die Existenz einer Drehung ϱ ausgesagt werden, so dass sogar

$$\Phi(\varrho\, p_1) = \Phi(\varrho\, p_2) = \Phi(\varrho\, p_3) = \Phi(\varrho\, p_4) \tag{b}$$

ausfällt. – Offen bleibt unseres Wissens die Frage, ob die Bedingung (b) auch bei einem beliebigen Rechteck erfüllbar ist oder ob sich stetige Funktionen Φ konstruieren lassen, für welche die vier Funktionswerte bei einem passend vorgegebenen Rechteck für keine Drehlage zusammenfallen.

Beim Übergang von (a) zu (b) muss eine neu hinzutretende Bedingung neu erfüllt werden. Bedenkt man, dass auch die Parameterzahl der zum Einsatz gebrachten Abbildungsgruppe zunimmt, so erscheint die oben erwogene Erfüllbarkeit nicht unwahrscheinlich. Unser Problem lautet also: *Lässt sich das Dyson-Livesaysche Theorem auf beliebige der Kugelfläche einbeschriebene Rechtecke ausdehnen?* H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung einer Formel von Descartes

1. In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen: Sind in einem Raume von n Dimensionen $(n+1)$ Kugeln mit den Radien $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ gegeben und wird vorausgesetzt, dass sich diese paarweise von aussen berühren, so gilt für die Radien ϱ' und ϱ'' der beiden Kugeln, welche sämtliche gegebenen Kugeln berühren, die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{\varrho}\right)^2 = n\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \cdots + \frac{1}{r_{n+1}^2} + \frac{1}{\varrho^2}\right). \tag{1}$$

Für $n = 2$ erhält man eine Formel, die DESCARTES in einem Briefe an Prinzessin Elisabeth mitteilt [*Oeuvres de Descartes par Adam et Tannery*, Bd. IV (Paris 1901), S. 49]. Auch JAKOB STEINER kennt diesen Spezialfall (*Gesammelte Werke*, I, S. 63); er wird die Formel wohl unabhängig von DESCARTES gefunden haben. An einem andern Orte (*Gesammelte Werke*, I, S. 180) stellt STEINER die Aufgabe: «Zwischen den Radien von 5 Kugeln, von denen je 2 einander berühren, eine Relation zu finden», ohne jedoch eine Lösung anzugeben. Für $n = 3$ liefert (1) die Antwort auf diese Frage, denn unsere Formel ist symmetrisch in bezug auf die $(n+2)$ Radien $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}, \varrho$ und kann als Bedingung aufgefasst werden, die erfüllt sein muss, damit $(n+2)$ Kugeln des n-dimensionalen Raumes sich gegenseitig berühren. Formel (1) kann noch auf eine dritte Weise gedeutet werden: Es ist die Bedingung, die $(n+2)$ Punkte, nämlich die Mittelpunkte der Kugeln, erfüllen müssen, damit sie in einem Raume von n Dimensionen liegen. Als Anwendung von (1) beweisen wir den Schliessungssatz von STEINER über Ketten von Berührungskugeln für den einfachsten Fall, wo die drei gegebenen Kugeln sich selbst paarweise berühren. Für diesen Spezialfall erhalten wir eine Reihe von Beziehungen zwischen den Radien der Kugeln der Kette.

---

[1]) H. HADWIGER, *Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis- und Kugelfläche*, El. Math. *14*, 49–60 (1959), insbesondere Satz 2.1.

[2]) Literaturangaben vgl. oben zitierte Abhandlung.