

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 15 (1960)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Ungelöste Probleme

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Le problème reste ouvert quel est le plus petit nombre naturel  $k$  tel que les nombres  $k \cdot 2^n + 1$ , où  $n = 1, 2, \dots$  sont tous composés.

Il est à remarquer que M. P. ERDÖS a démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels impairs  $k$  tels que chacun des nombres  $2^n + k$ , où  $n = 1, 2, \dots$ , est composé (divisible par un des nombres 3, 5, 7, 13, 17, 241). Voir P. ERDÖS [2], page 7; voir aussi mon livre [3], page 379, où se trouve la démonstration de A. SCHINZEL d'existence d'une infinité de nombres impairs  $k$  tels que chacun des nombres  $2^n + k$ , où  $n = 1, 2, \dots$ , est composé et a un diviseur premier  $< 100$ .

Or, M. A. SCHINZEL a démontré que si  $k$  est un tel nombre, alors tous les nombres  $k \cdot 2^n + 1$ , où  $n = 1, 2, \dots$ , sont composés. Voici sa démonstration :

Supposons que  $k$  est un nombre naturel tel que chacun des nombres  $2^n + k$ , où  $n = 1, 2, \dots$ , a un diviseur premier  $p \mid P$ , où  $P$  est un nombre naturel impair donné. D'après l'hypothèse, le nombre  $2^{n[\varphi(P)-1]} + k$  a un diviseur premier  $p \mid P$ . Or, on a  $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{P}$ , d'où  $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{p}$ , et, comme  $2^{n[\varphi(P)-1]} + k \equiv 0 \pmod{p}$ , on trouve  $k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ , c. q. f. d.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. ROBINSON, *A report on primes and on factors of Fermat numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 673–681 (1958).
- [2] P. ERDÖS, *On integers of the form  $2^n + p$  and some related problems*, Summa Brasiliensis Mathematicae Vol. II, Fasc. 8, 119 (1950).
- [3] W. SIERPIŃSKI, *Teoria Liczb*, Cz. II, Monografie Matematyczne t. 38, Varsovie 1959.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 36.** Das  $n$ -te Distanzpotenzintegral eines eigentlichen konvexen Körpers  $A$  des gewöhnlichen Raumes ist durch Ansatz

$$T_n = T_n(A) = \iint r^n dP dQ \quad [n \geq -2, \text{ ganz}]$$

gegeben, wobei  $P$  und  $Q$  zwei in  $A$  unabhängig variierende Punkte,  $r$  die Distanz zwischen  $P$  und  $Q$  und  $dP$  und  $dQ$  die Volumendifferentiale bezeichnen. Zahlreiche geometrische und physikalische Körperfunktionale hängen mit solchen Distanzpotenzintegralen zusammen. Wenn  $V$  das Volumen bedeutet, so gelten beispielsweise die folgenden Beziehungen:  $T_{-2} = 4\pi \tilde{r} V$  ( $\tilde{r}$  = mittlere Ausstrahlungsweglänge);  $T_{-1} = S$  (Newtonsches Selbstpotential);  $T_0 = V^2$ ;  $T_2 = 2 I V$  ( $I$  = polares Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes). Eine interessante Frage ergibt sich, wenn man nach dem Extremalkörper sucht, der bei vorgeschrriebener Norm  $N$  ein maximales Distanzpotenzintegral aufweist. Die Norm ist durch  $N = 2\pi \bar{b}$  definiert, wo  $\bar{b}$  die mittlere Breite des Körpers  $A$  bezeichnet; ein anderer Zusammenhang wird mit  $N = M$  (Integral der mittleren Krümmung) gegeben. Ist  $K$  eine mit  $A$  normgleiche Kugel, so steht in erster Linie die Ungleichung

$$T_n(A) \leq T_n(K) \quad [N(A) = N(K)] \tag{*}$$

zur Diskussion, welche die Extremaleigenschaft der Kugel ausdrückt. Nach den heute vorliegenden Ergebnissen zeigt sich, dass Ungleichung (\*) sicher richtig ist für

$n = -2, -1, 0, 2$ , dagegen fraglich bleibt für  $n = 1, 3, 4, 5$  und sicher falsch ist für  $n = 6, 7, \dots$ . Dass die Kugel für  $n \geq 6$  ihre Extremeigenschaft einbüsst, wurde von KUMMER<sup>1)</sup> nachgewiesen. Da sich in der neueren Fachliteratur auch ein Ergebnis findet, das diesem Tatbestand widerspricht, wurde der obengenannte theoretisch ermittelte Befund auch praktisch-numerisch mit Hilfe eines Rechenautomaten überprüft<sup>2)</sup>. Es sei  $E_x$  ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen  $r, r, x r$  ( $1 \leq x < \infty$ ), das mit der Einheitskugel  $E_1 = K$  normgleich ist, und es sei

$$q(x) = \frac{T_6(E_x)}{T_6(K)} \quad [N(E_x) = N(K)]$$

das Verhältnis der entsprechenden sechsten Distanzpotenzintegrale. Wenn  $q(x) > 1$  ausfallen kann, ist offenbar bereits bewiesen, dass die Kugel die hier fragliche Extremeigenschaft für  $n = 6$  eingebüßt hat. Nun ergibt eine Berechnung, auf die wir hier verständlicherweise nicht eingehen können:

$$q(x) = \frac{4096 (x^2 - 1)^6 (16 x^2 + 8 x^4 + 6 x^6 + 5 x^8)}{35 \{x \sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\}^{12}}.$$

Hierzu führen wir einige mit dem Gerät ermittelte numerische Werte an:

$x$	$q(x)$
1,00	1,000 0000
1,40	1,046 4592
1,80	1,107 5398
2,20	1,089 9263
2,60	0,997 4864
1,92	1,111 7633

Die unterste Zeile gibt das numerisch bestimmte Maximum von  $q(x)$ ; damit ist belegt, dass das Rotationsellipsoid mit dem Achsenverhältnis  $x = 1,92$  das optimale sechste Distanzpotenzintegral liefert, das etwas grösser ausfällt als dasjenige der normgleichen Kugel.

Damit resultiert das Problem: *Welche konvexen Körper weisen unter allen normgleichen das grösstmögliche Distanzpotenzintegral auf, wenn  $n \geq 6$  ist?* Diese noch unbekannten Extremalkörper dürften Zentralsymmetrie aufweisen! H. HADWIGER

<sup>1)</sup> H. KUMMER, Über Sehnenpotenzintegrale konvexer Körper im  $k$ -dimensionalen Raum, Manuscript (Bern 1957).

<sup>2)</sup> Ausgeführt im Institut für angewandte Mathematik der Universität Bern, Frühjahr 1959.

## Kleine Mitteilungen

### A Special Higher Congruence

Let  $p$  be a prime  $> 2$ . If the congruence

$$x^{p+1} + a x^p + b x + c \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (1)$$

is solvable, then clearly the quadratic congruence

$$x^2 + (a + b)x + c \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

is solvable. Thus a necessary condition for the solvability of (1) is that

$$d = (a + b)^2 - 4c \quad (3)$$