Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1960)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Wird der Koordinatenursprung nach U^v verlegt, so folgen aus $dX^*/ds^* = \cos\tau$ und $dY^*/ds^* = \sin\tau$ die Gleichungen

$$X^* = rc^2 \int_0^\tau \frac{\cos\tau\, d\tau}{(c^2-\tau^2)^{3/2}}, \quad Y^* = rc^2 \int_0^\tau \frac{\sin\tau\, d\tau}{(c^2-\tau^2)^{3/2}}. \tag{14}$$

Auch diese Integrale sind nicht elementar auswertbar.

Für die *natürliche Gleichung* von f^v findet man durch Elimination von τ aus s^* und $\varrho^* = ds^*/d\tau$ die Form

$$c^2 r^4 \varrho^{*2} = (r^2 + s^{*2})^3. \tag{15}$$

W. WUNDERLICH, Wien

Bemerkung und Lösung zum Problem Nr. 29

Unendlich viele Primzahlen der Form $8n+1$
mit geradem und ungeradem Exponenten für 2

Diese Notiz soll zum «ungelösten Problem Nr. 29» in Band 14, Heft 3, der «Elemente» auf S. 60 (gestellt von W. SIERPIŃSKI) Stellung nehmen und auch dessen vollständige Lösung bringen sowie sie etwas verallgemeinern. Es handelt sich um die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen $p = 8n+1$ gibt, welche einen geraden bzw. ungeraden kleinsten positiven Exponenten e mit $2^e \equiv 1(p)$ haben. – Zunächst wurden versehentlich die Primzahlen 17, 41, 97, welche Beispiele für geraden Exponenten ($e = 8, 10, 48$) sein sollten, als solche für ungeraden Exponenten angeführt; dafür dienen etwa 73 und 89 ($e = 9, 11$).

Sodann kann man die gestellte Frage in beiden Fällen positiv beantworten, und zwar auf Grund des verallgemeinerten «Dirichletschen Reihensatzes» im Körper der Gaussischen Zahlen $K(i)$ in Verbindung mit dem Westernschen Kriterium für den 8. Potenzcharakter der Zahl 2 [A. E. WESTERN, *Some Criteria for the Residues of Eigth and Other Powers*, Proc. London math. Soc. (2) *9*, 244–272 (1911); vom Verfasser weiter ausgeführt, Deutsche Math. *4*, 44–52 (1939)]. Danach gibt es unendlich viele Primideale aus den Restklassen $\pm 3 + 8i$, $\pm 5 + 8i$ mod 16, also unendlich viele natürliche Primzahlen der Restklasse $16n+9$ mit der Darstellung $x^2 + 64u^2$ (u ungerade), und nach diesen ist *2* ein 8. Potenzrest, 2 kommt somit ein ungerader Exponent zu.

Auf demselben Wege kann man auch unendlich viele Primzahlen mit bezüglich 2 geradem Exponenten nachweisen, ohne auf die sehr speziellen Teiler der Fermat-Zahlen $2^{2^n}+1$ zu greifen. Es sind dies solche, nach denen 2 nicht biquadratischer oder wenigstens nicht 8. Potenzrest ist. Diese erhält man aus den Primideal-Restklassen $\pm 1 + 4i$, $\pm 3 + 4i$ mod 8 bzw. ± 3, ± 5 mod 16, das gibt natürliche Primzahlen mit der Darstellung $x^2 + 16u^2$ (u ungerade) bzw. solche der Form $16n+9$ mit der Darstellung $x^2 + 256y^2$ (Beispiele 281, 617). Nach letzteren gehört übrigens die Zahl -2 als 8. Potenzrest zu einem ungeraden Exponenten. Es gibt also auch unendlich viele Primzahlen der Form $8n+1$ mit ungeradem Exponenten für -2, wie er allen Primzahlen der Art $8n+3$ zukommt. Hier wird der Exponent für 2 genau durch 2, nicht durch 4 teilbar.

Am Schlusse sei dieses Ergebnis noch dahin verallgemeinert, dass es zu jedem «Geradheitsgrad» dieses Exponenten unendlich viele Primzahlen der Klasse $8n + 1$ gibt. Es soll also der Exponent genau durch 2^k, nicht durch 2^{k+1} teilbar sein. Unter $k = 1$ fallen die vorhin erwähnten $p = 16n + 9 = x^2 + 256y^2$. Und für $k \geqq 2$ bedienen wir uns der Primzahlen $x^2 + 16u^2$, nach welchen allen 2 nicht biquadratischer Rest ist. Durch geeignete Wahl der ungeraden Zahlen x und u lässt es sich stets so einrichten, dass $x^2 + 16u^2 \equiv 1 \dotplus 2^{k+1} \bmod 2^{k+2}$ wird. Und aus allen diesen Restklassen $x + 4ui \bmod 2^{k+1}$ gibt es unendlich viele Primideale. A. AIGNER, Graz

Aufgaben

Aufgabe 346. Wieviele modulo einer Primzahl p irreduzible, ganzzahlige Polynome mit dem ersten Koeffizienten 1 gibt es, wenn modulo p kongruente Polynome nicht unterschieden werden? H. LENZ, München

Lösung: Wir bezeichnen mit $A(m)$ die Anzahl aller unitärer irreduzibler Polynome vom Grad m über dem Primkörper $P = GF(p)$ der Charakteristik p. Bekanntlich ist

$$x^{p^m} - x$$

das Produkt aller unitärer irreduzibler Polynome vom Grad $d \mid m$. Daher ist

$$p^m = \sum_{d \mid m} dA(d) ,$$

und hieraus ergibt sich mittels der Umkehrformel von Möbius

$$A(m) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) p^d .$$

A. BAGER, Hjørring

Der Aufgabensteller gibt für die Anzahl der über einem Körper mit p^n Elementen irreduziblen Polynome mit dem ersten Koeffizienten 1 den allgemeineren Ausdruck

$$\frac{1}{m} \sum_{d \mid m} p^{nd} \mu\left(\frac{m}{d}\right) .$$

Weitere Lösungen sandten J. FIEDLER (Regensburg) und W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 347. In einer Ebene sind die Kreise K, K' und die Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben. Gesucht werden die Punkte X_1, X_2, X_3 auf K und X'_1, X'_2, X'_3 auf K', so dass die drei Punkte-Quintupel $X_1X_2X'_1X'_2P_3$, $X_2X_3X'_2X'_3P_1$, $X_3X_1X'_3X'_1P_2$ je auf einem Kreis liegen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Wir bezeichnen mit k_1 den Kreis durch X_j, X'_j, X_k, X'_k $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Je 2 dieser 3 Kreise k_1 haben die Geraden $X_1X'_1$, $X_2X'_2$, $X_3X'_3$ zu Chordalen, die einander im Potenzzentrum A der Kreise k_1 schneiden. Der Punkt A hat bezüglich der Kreise k_1 die Potenz $\overrightarrow{AX_1} \cdot \overrightarrow{AX'_1} = \overrightarrow{AX_2} \cdot \overrightarrow{AX'_2} = \overrightarrow{AX_3} \cdot \overrightarrow{AX'_3} = q^2$. Der Kreis K durch X_1, X_2, X_3 und der Kreis K' durch X'_1, X'_2, X'_3 entsprechen einander in der Inversion am Orthogonalkreis k^* (Mittelpunkt A, Radius q) der Kreise k_1. A ist demnach ein (innerer oder äusserer) Ähnlichkeitspunkt von K und K'. Der Kreis k_1 durch $X_jX'_jX_kX'_k$ und P_1 enthält auch den an k^* gespiegelten Punkt P'_1 von P_1. Die Kreise durch P_1 und P'_1 schneiden K in den Punktepaaren einer Involution mit dem Involutionszentrum Q_1, das auch auf der Geraden X_jX_k liegen muss. Das gesuchte Dreieck $X_1X_2X_3$ ist demnach dem Kreis K so eingeschrieben, dass seine Seiten X_jX_k durch die Punkte Q_1 laufen (Problem des Ottaiano).