

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 14 (1959)  
**Heft:** 6  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*k* = 5 sogar äquivalente Aussagen darstellen. In der Tat sind diese Zusammenhänge in der von uns zitierten Abhandlung von K. WAGNER vollständig abgeklärt worden<sup>2)</sup>. Der hier nachgetragene Tatbestand ist für die Erwägung der Chance, auf diesem Wege das berühmte Färbungsproblem lösen zu können, von ziemlicher Bedeutung, und dürfte erneuten Studien in dieser Richtung, wie sie beispielsweise von G. A. DIRAC durchgeführt wurden, erneute Impulse verleihen. H. HADWIGER

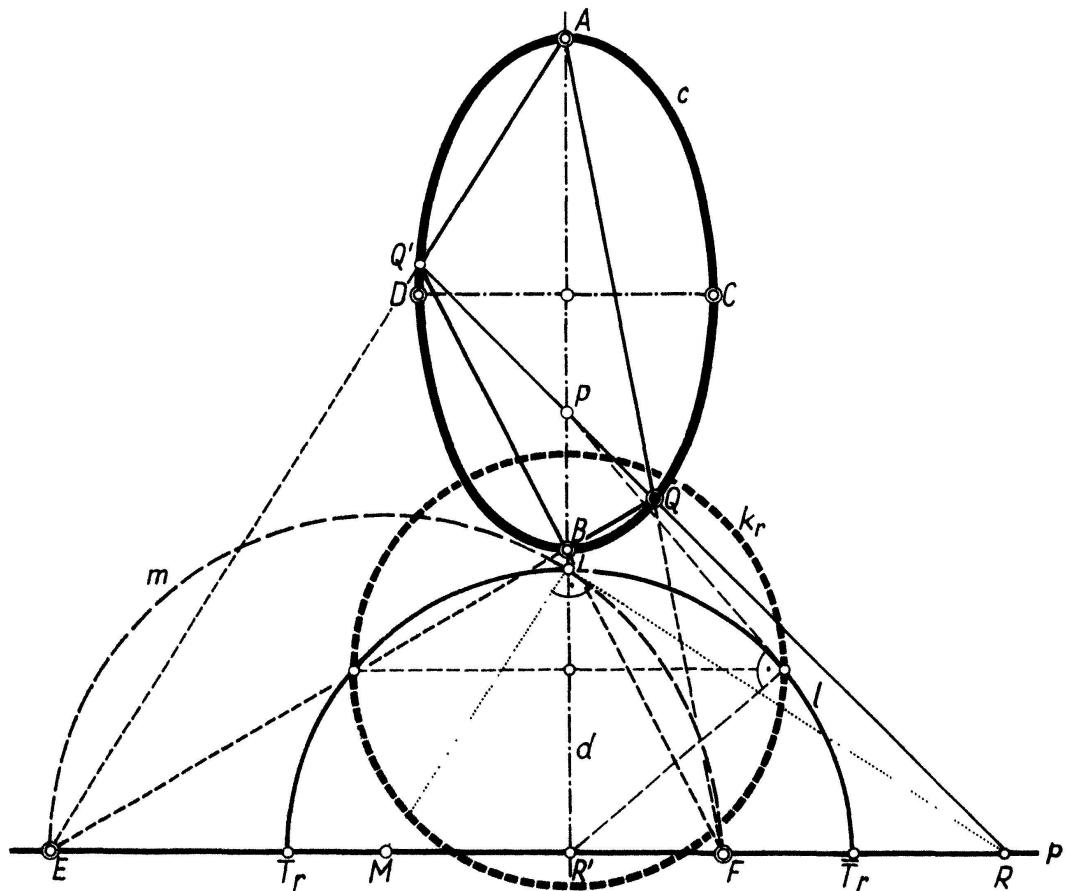
H. HADWIGER

## Aufgaben

**Aufgabe 327.** Man konstruiere jenen Kegelschnitt, der einen nullteiligen Kreis  $k$  in konjugiert imaginären Punkten  $T, \bar{T}$  berührt und durch einen reellen Punkt  $Q$  geht.

E. DOMKOWITSCH, Wien

*Lösung des Aufgabenstellers:* Sei  $k$ , der reelle Vertreter des nullteiligen Kreises  $k$  (siehe Figur),  $Q$  der gegebene Kegelschnittspunkt,  $p$  der reelle Träger der Punkte  $T$ ,  $\bar{T}$  und  $P$  der Pol von  $p$  bezüglich  $k$  (Antipol bezüglich  $k$ ). Die reellen Vertreter  $T_1$ ,  $\bar{T}_1$  von  $T$ ,  $\bar{T}$



liegen bekanntlich<sup>1)</sup> auf dem durch die Endpunkte des zu  $p$  parallelen Durchmessers von  $k$ , gehenden Kreis  $l$  mit der Mitte  $R'$  auf  $p$ . Die Gerade  $PQ$  trifft  $p$  in  $R$ . Jener Punkt  $Q'$  von  $PQ$ , der von  $Q$  durch  $P$  und  $R$  harmonisch getrennt wird, liegt dann auch auf dem zu suchenden Kegelschnitt  $c$  (Polareigenschaft). Die Hauptscheitel  $A, B$  von  $c$ , welche aus Symmetriegründen auf dem zu  $p$  normalen Durchmesser  $d$  von  $k$ , liegen, bestimmen mit  $Q, Q'$  ein

<sup>2)</sup> Math. Ann. 114, 570–590, insb. 573 (1937).

vollständiges Viereck, in welchem  $P$  eine Diagonalecke ist. Die restlichen Diagonalecken  $E, F$  liegen auf  $p$ . Sie gehören einerseits der Involution konjugierter Punkte bezüglich  $c$  auf  $p$  an und werden anderseits durch  $R'$  und  $R$  harmonisch getrennt. Somit sind  $E, F$  als gemeinsames Punktpaar zweier Involutionen festgelegt und ergeben sich hier sofort als Gegenpunkte eines durch  $L = d \wr$  gehenden Kreises  $m(M, \overline{ML})$  bezüglich dessen  $R$  und  $d$  Pol und Polare sind ( $RL \perp LM$ ). Damit sind aber die Hauptscheitel  $A, B$  von  $c$  als restliche Ecken des erwähnten vollständigen Vierecks bestimmt. Die Nebenscheitel  $C, D$  finden wir nun leicht auf bekannte Weise (zum Beispiel mit der umgekehrten Papierstreifenkonstruktion).

Auch im Sinne der darstellenden Geometrie lässt sich eine schöne Lösung angeben: Deuten wir  $k$ , als Distanzkreis einer Perspektive ( $k =$  Zentralbild des absoluten Kegelschnittes), so ist der zu ermittelnde Kegelschnitt  $c$  der scheinbare Zentralumriss einer Kugel  $\gamma$ , welche den durch den gegebenen Punkt  $Q$  gehenden Sehstrahl berührt. Die Gerade  $p = T\bar{T}$  ist dabei die Flucht der Ebene des wahren Kugelumrisses. Die Kugelmitte kann dann auf dem zu der erwähnten Ebene normalen Sehstrahl beliebig angenommen und  $\gamma$  samt  $c$  auf bekannte Weise konstruiert werden.

Zwei andere, allerdings konstruktiv weniger praktische Lösungen beständen darin,  $c$  zentralkollinear auf einen durch  $T, \bar{T}$  gehenden oder die konjugiert imaginären Tangenten in  $T, \bar{T}$  an  $k$  berührenden Kreis zu beziehen.

Eine weitere Lösung legte K. GRÜN (Linz) vor.

**Aufgabe 328.**  $T$  ist ein Punkt einer Tschirnhausen-Kubik  $k$ ,  $t$  die Tangente in  $T$  an  $k$  und  $S$  der Schnittpunkt von  $t$  mit der Scheiteltangente  $a$  von  $k$ .  $P$  und  $Q$  sind ferner jene Punkte von  $t$ , die die Strecke  $ST$  von innen bzw. von aussen im Verhältnis  $1:2$  teilen. Bestimme den Ort dieser Punkte  $P$  und  $Q$ , wenn  $T$  die Kubik  $k$  durchläuft, und untersuche den Zusammenhang zwischen der Kurve  $\{Q\}$  und der Evolute der Kurve  $\{P\}$ .

R. BEREIS, Dresden, und H. BRAUNER, Wien

*Lösung der Aufgabensteller:* Die Tschirnhausen-Kubik  $k$  ist bekanntlich die negative Fusspunkt-Kurve einer Parabel  $p$  in bezug auf deren Brennpunkt  $F$ . Gleitet also ein Schenkel  $s$  eines rechten Winkels durch den Brennpunkt  $F$  von  $p$ , während der Winkelscheitel  $R$  die Parabel  $p$  durchläuft, so umhüllt der zweite Schenkel  $t$  die Tschirnhausen-Kubik  $k$ . Die Normale auf  $s$  in  $F$  schneidet die Parabelnormale  $n$  von  $R$  im zugehörigen Momentanzentrum  $M$ . Der Lotfusspunkt von  $M$  auf  $t$  ist daher der Berührpunkt  $T$  von  $t$  mit  $k$ . Ist  $V$  der Schnittpunkt der Parabeltangente  $t_1$  in  $R$  mit der Parabelachse und  $U$  der Schnittpunkt der Kubiktangente  $t$  mit dem Achsenlot in  $V$ , so ist nach elementaren Parabel-eigenschaften das Viereck  $FVUR$  ein Deltoid und das Viereck  $MFUR$  ein Parallelogramm. Daher gilt:  $\overline{TR} = \overline{MF} = \overline{RU}$ . Die Scheiteltangente  $a$  der Parabel  $p$  – gleichzeitig auch Scheiteltangente der Kubik  $k$  – halbiert bekanntlich die Strecke  $\overline{RV}$  und schneidet damit auch  $\overline{RU}$  in ihrem Mittelpunkt  $S$ .  $R$  teilt somit die Strecke  $\overline{ST}$  im Verhältnis  $1:2$  von innen und ist mit  $P$  identisch. Die Parabel  $p$  ergibt sich demnach als Ort der Punkte  $P$ .

Man erhält bekanntlich die Krümmungsmitte  $K$  des Punktes  $P (=R)$  der Parabel durch Verdoppelung der Strecke  $PM$ . Verbindet man nun  $K$  mit  $F$  und schneidet diese Gerade mit der Kubiktangente  $t$ , so ergibt sich der gesuchte Punkt  $Q$ , da  $\overline{PU} = \overline{UQ}$  und daher  $\overline{TS} = \overline{SU}$  gilt. Die Punkte  $M, U, F$  sind die Seitenmitten des Dreiecks  $QKP$ , der Punkt  $Q$  ist daher das Spiegelbild von  $K$  bezüglich  $F$ .

Zusammenfassend gilt: Teilt man bei einer Tschirnhausen-Kubik die Tangentenstrecke zwischen ihrer Scheiteltangente und dem Berührpunkt harmonisch im Verhältnis  $1:2$ , so liegen alle inneren Teilungspunkte auf ihrer Fusspunktparabel, während die äusseren Teilungspunkte eine Neilsche Parabel erfüllen, die zur Evolute der genannten Parabel bezüglich ihres Brennpunktes symmetrisch liegt.

Eine rechnerische Lösung legte R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England) vor.

<sup>1)</sup> Siehe etwa E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Vorlesungen über darstellende Geometrie, I. Die linearen Abbildungen* (Deuticke 1923), S. 35f.

**Aufgabe 329.** Man beweise, dass aus der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} \geq n \quad (x_i > 0, n = 0, 1, 2, \dots)$$

die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} \geq n^{n+1}$$

folgt.

J. BERKES, Szeged

*Lösung:* Da die Summe von  $n-1$  Summanden aus  $\Sigma$  kleiner als  $n-1$  ist, muss die Summe von je zwei Summanden  $> 1$  sein. Hieraus folgt  $x_i x_k < 1$ , denn aus  $x_i x_k \geq 1$  würde sich

$$\frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_k} \leq 1$$

ergeben. Es sei nun  $x_1$  das kleinste und  $x_2$  das grösste der  $x_i$ , wobei wir  $x_1 < x_2$  annehmen dürfen, da im Falle, dass alle  $x_i$  gleich sind, die Richtigkeit der Behauptung sofort bestätigt werden kann. Ersetzt man in  $\Sigma$   $x_1$  und  $x_2$  durch  $\sqrt{x_1 x_2}$ , so wächst  $\Sigma$ . Die Ungleichung

$$\frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+y} < \frac{2}{1+\sqrt{y x_2}}$$

ist nämlich sicher richtig für  $y = 0$ . Wächst  $y$  bis  $x_1$ , so kann die Ungleichung nie in eine Gleichung übergehen, da aus einer solchen

$$(y - x_2)^2 (1 - x_2 y) = 0$$

folgen würde, während  $y \leq x_1 < x_2$  und  $x_2 y \leq x_2 x_1 < 1$  gilt. Also ist  $\Sigma' > \Sigma$  aber  $\Pi' = \Pi$ . Ersetzt man in  $\Sigma$  aber  $x_1$  und  $x_2$  durch  $x'_2 = x'_1 = \lambda \sqrt{x_1 x_2}$  und wählt  $\lambda$  so, dass  $\Sigma' = \Sigma$  wird, so wird  $\lambda > 1$  und also  $\Pi' < \Pi$ .

Wiederholt man das Verfahren, indem man wieder die kleinste und die grösste unter den  $n+1$  Zahlen  $x'_1, x'_2 = x'_1, x_3, \dots, x_{n+1}$  durch ihr geometrisches Mittel ersetzt und mit einem geeigneten Faktor  $\lambda'$  multipliziert, so dass  $\Sigma$  konstant bleibt, so nimmt  $\Pi$  beständig ab. Die Folge der Minima der  $n+1$   $x$ -Werte wächst dabei monoton, bleibt aber wegen  $x_i x_k < 1$  beschränkt. Sie konvergiert also nach einem Grenzwert  $x_0$ , nach welchem dann auch die Maxima und damit alle  $x_i$  konvergieren müssen. Dann ist aber  $x_0 \leq 1/n$ , also  $\Pi_0 \geq n^{n+1}$ . Die Behauptung wird also wegen  $\Pi > \Pi_0$  bestätigt.

C. BINDSCHEDLER, Küschnacht

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass mittels des obigen Resultates der in seinem Artikel *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung* [El. Math. 12, 121–123 (1957)] bewiesene Satz sofort für ein  $n$ -dimensionales Simplex hergeleitet werden kann.

Weitere Lösungen sandten L. HUBER (Stuttgart), F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (Stockdorf, Starnberg).

**Aufgabe 330.** Ein Dreieck mit den Winkeln  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) habe  $\varrho$  und  $r$  als In- und Umkreisradius.  $2\sigma$  sei der Umfang des von den Berührungs punkten des Inkreises gebildeten Dreiecks. Man beweise die Beziehung

$$8 \sum_{i=1}^3 \left( \cos \frac{\alpha_i}{4} \right)^4 - \frac{\varrho}{r} - \frac{4\sigma}{\varrho} = 10.$$

F. LEUENBERGER, Zuoz

*Lösung:* Es ist

$$\sigma = \varrho \sum \cos \frac{\alpha_i}{2}, \quad \varrho = 4r \prod \sin \frac{\alpha_i}{2}.$$

Ferner gilt

$$4 \sum \left( \cos \frac{\alpha_i}{4} \right)^4 = \sum \left( 1 + \cos \frac{\alpha_i}{2} \right)^2 = 3 + 2 \sum \cos \frac{\alpha_i}{2} + \sum \cos^2 \frac{\alpha_i}{2}.$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt unmittelbar mittels der Beziehung

$$\begin{aligned} \sum \cos^2 \frac{\alpha_i}{2} &= 2 - \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ &= 2 + 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \left( \cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha_1}{2} \sin \frac{\alpha_2}{2} \right) \\ &= 2 + 2 \prod \sin \frac{\alpha_i}{2}. \end{aligned}$$

R. LAUFLER, Graz

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. BERKES (Szeged), E. HERRMANN (Porz, Rhein), L. HUBER (Stuttgart), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest), R. WHITEHEAD (St. Yves, Cornwall/England), I. ZANA (Budapest).

**Aufgabe 331.** Es sei  $p$  eine Primzahl,  $n = p^r h$ ,  $(p, h) = 1$ . Man zeige, dass für das Kreisteilungspolynom  $\Phi_n(x)$  vom Grad  $\varphi(n)$  in einem Körper der Charakteristik  $p$  die Zerlegung

$$\Phi_n(x) = [\Phi_h(x)]^{\varphi(n/h)}$$

gilt (vgl. Aufgabe 293).

A. BAGER, Hjørring

1. *Lösung:* Wir wenden Induktion nach  $n$  an. Die Zerlegung

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

hat bekanntlich (Induktionsbeweis leicht!) ganzrationale Koeffizienten. Sie gilt auch mod  $p$ . In einem Körper der Charakteristik  $p$ , in dem  $x^h - 1$  in Linearfaktoren zerfällt, hat  $x^n - 1 = (x^h - 1)^{p^r}$  genau die  $h$ -ten Einheitswurzeln als  $p^r$ -fache Nullstellen.  $\Phi_n(x)$  hat sicher keine primitive  $d$ -te Einheitswurzel  $\delta$  mit  $d|h$ ,  $d < h$ , als Nullstelle; denn  $\delta$  kommt unter den Nullstellen der Polynome  $\Phi_{dp^k}(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots, r$  nach Induktionsvoraussetzung schon mit den Vielfachheiten  $1, (p-1)p^{k-1}$  ( $k > 0$ ) vor, also insgesamt mit der Vielfachheit  $p^r$ . Also sind die Nullstellen von  $\Phi_n(x)$  genau die primitiven  $h$ -ten Einheitswurzeln. Diese kommen auch noch als Nullstellen von  $\Phi_{hp^k}(x)$ ,  $k < r$ , vor, und zwar jeweils alle in gleicher Vielfachheit, wie man der Induktionsvoraussetzung entnimmt. Also haben sie auch als Nullstellen von  $\Phi_n(x)$  alle die gleiche Vielfachheit  $m$ . Es folgt

$$\Phi_n(x) = [\Phi_h(x)]^m.$$

Wegen  $\varphi(n) = \varphi(h) \cdot \varphi(p^r)$  folgt  $m = \varphi(p^r)$ , wie behauptet.

H. LENZ, München

2. *Lösung:* For  $n = p^r h$ ,  $(p, h) = 1$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \prod_{dt=n} (x^d - 1)^{\mu(t)} = \prod_{dt=h} (x^{p^r d} - 1)^{\mu(t)} \prod_{dt=h} (x^{p^{r-1} d} - 1)^{\mu(p^t)} \\ &= \prod_{dt=h} (x^d - 1)^{(p^r - p^{r-1}) \mu(t)} = \{\Phi_h(x)\}^{\varphi(p^r)}. \end{aligned}$$

L. CARLITZ, Durham, N. C., USA

**Aufgabe 332.** Show that

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{\pi} \sin \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \pi \right\}.$$

L. CARLITZ, Durham, N. C. (USA)

*Lösung:* Aus der bekannten Produktdarstellung des Sinus folgt

$$\begin{aligned}\frac{\sin \pi x}{\pi x} &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/n} \\ &= (1+x) e^{-x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) e^{-x/(n+1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/n} \\ &= (1+x) e^{-x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2+x}{n(n+1)}\right) e^{x/n(n+1)}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

konvergiert das letzte Produkt auch ohne den Exponentialfaktor. Man erhält also

$$\frac{\sin \pi x}{\pi(x^2+x)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2+x}{n(n+1)}\right). \quad (*)$$

Für  $x^2+x=1$  wird

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. (Die zweite Lösung  $x_2$  führt auf denselben Wert des Produktes.)

W. SCHLUP, Zürich

Ersetzt man in (\*)  $x$  durch  $-x$ , so erhält man eine bekannte Formel (vgl. PÓLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 1, S. 128). Auf dieser Formel beruht die Lösung von A. BAGER (Hjørring) und diejenige des Aufgabenstellers. Dieser weist darauf hin, dass allgemeinere Formeln von M. MIKOLÁS [*On a Class of Infinite Products Whose Value Can Be Expressed in Closed Form*, Acta sci. math. 16, 58–62 (1955)] angegeben wurden.

Weitere Lösungen sandten E. HERRMANN (Porz, Rhein) und H. MEILI (Winterthur).

### Neue Aufgaben

366. An eine Parabel werden drei beliebige Tangenten gelegt. Man beweise, dass das Produkt der Krümmungsradien in den Berührungs punkten gleich dem 64fachen Kubus des Umkreisradius des aus den Tangenten gebildeten Dreiecks ist.

A. CZWALINA, Berlin

367. Es sei  $O$  ein beliebiger Punkt im Innern eines Tetraeders  $A_1A_2A_3A_4$ . Bedeutet  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) den Abstand  $\overline{OA_i}$ ,  $r_i$  den Abstand der Seitenfläche  $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$  von  $O$ , so gelten die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^4 \frac{R_i}{3 \cdot 2^n r_i + (4 - 2^n) R_i} \geq 1 \quad (n = 0, 1, 2).$$

Gleichheit tritt nur ein, wenn  $O$  Mittelpunkt eines regulären Tetraeders ist. Man beweise diese Ungleichungen.

Ist  $O$  analog innerer Punkt eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$ ,  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Abstand  $\overline{OA_i}$ ,  $r_i$  der Abstand der Seite  $A_{i+1}A_{i+2}$  von  $O$ , so gilt ein entsprechendes Ungleichungssystem. Wie heisst es<sup>1)</sup>?

L. LEUENBERGER, ZuoZ

<sup>1)</sup> Vgl. dazu J. BERKES, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung*, El. Math. 12, 121–123 (1957).

368. Es sei  $f(x)$  im endlichen Intervall  $a \leq x \leq b$  positiv und beschränkt. Man beweise, dass es in diesem Intervall zwei Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  gibt, für die

$$\frac{(x_2 - x_1) f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4} (b - a) f(a)$$

gilt.

O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

369. Es gibt Quadratzahlen, bei denen in dekadischer Schreibweise auf die Einer eine Anzahl gleicher Ziffern folgen, zum Beispiel  $3333^2 = 11108889$ . Wie muss man die ersten beiden Ziffern (im Beispiel 9 und 8) wählen, damit die Übereinstimmung der Ziffern von der zweiten bis zur  $k$ -ten Stelle für beliebiges  $k$  durch Quadratzahlen realisierbar ist?

R. WAGNER, Karlsruhe

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Buelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Stelle im gleichen Koordinatensystem graphisch dar ( $a \doteq 4$  cm):

$$\varrho_1 = a(1 + \cos \varphi), \quad \varrho_2 = a(1 - \cos \varphi),$$

und berechne die von den beiden Figuren gemeinsam überdeckte Fläche.

►  $f = a^2(1,5\pi - 4)$ .

2. Die von der Kurve

$$\varrho = 5(1 + \cos \varphi) \quad (1 \doteq 1 \text{ cm})$$

eingeschlossene Fläche ist durch eine Senkrechte zum Nullstrahl zu halbieren.

► Lösung mittels graphischer Integration, der Abstand der gesuchten Gerade von der Spitze der Kardioide beträgt 4,1 cm.

3. Auf einem Kreis mit dem Radius  $r$  befinden sich der feste Punkt  $O$  (Ursprung des Koordinatensystems, Nullstrahl durch das Kreiszentrum) und der bewegliche Punkt  $Q$ .  $L$  ist Normalprojektion von  $O$  auf die Kreistangente in  $Q$ , auf der Tangente bestimmt man  $PL = LQ$ . Stelle die Gleichung des geometrischen Ortes von  $P$  in Polarkoordinaten auf und berechne die Fläche, die der Radiusvektor überstreicht, wenn  $P$  die Kurve einmal durchläuft.

►  $\varrho = 2r \cdot \cos \varphi/3$ , Kreiskonchoide.  $f = 3\pi r^2$ .

4. In einer Ebene liegen die Kreise  $k_1(M_1, r_1)$  und  $k_2(M_2, r_2)$ . Welches ist der geometrische Ort des Punktes  $P$ , in dem sich eine Tangente  $t_1$  von  $k_1$  und eine solche von  $k_2$  unter rechtem Winkel schneiden?

► Der geometrische Ort besteht aus zwei bezüglich  $M_1 M_2$  symmetrischen Kreiskonchoiden. Die Parallelen zu den Tangenten durch  $M_1$  bzw.  $M_2$  mögen sich in  $Q$  schneiden. Die Strecke  $PQ$  und der Winkel  $t_1 PQ$  sind konstant, die Gerade  $PQ$  geht durch einen festen Punkt auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $M_1 M_2$ .

5. Die Achsen zweier Drehkegelflächen sind erstprojizierend und liegen in derselben Hauptebene. Die Spitze der einen ist  $S_1(7; 7; 8)$ , ihr Öffnungswinkel beträgt  $60^\circ$ ; die Spitze  $S_2$  der anderen hat die Abszisse 10 und liegt auf einer Mantellinie der ersten, ihr Öffnungswinkel beträgt  $120^\circ$ . Konstruiere die Schnittkurve der beiden Flächen.

► Grundriss: Kreiskonchoide, Aufriss: Parabelbogen.