Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

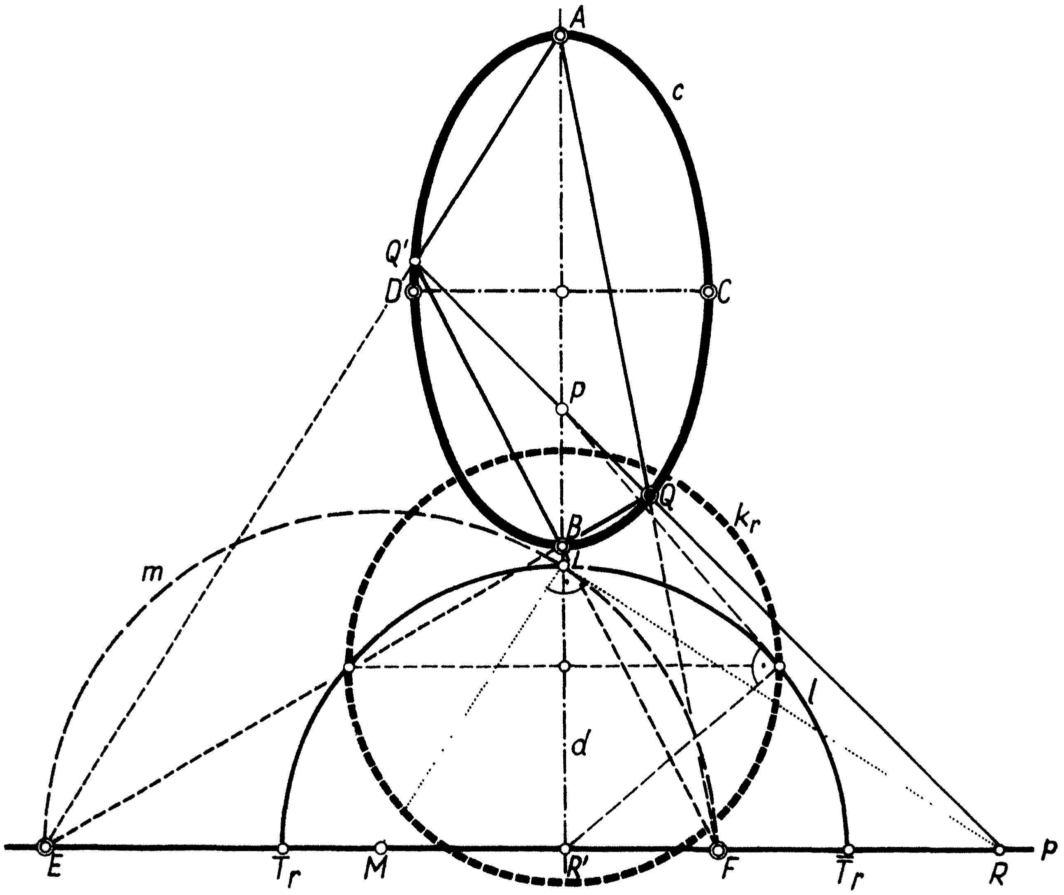
$k = 5$ sogar äquivalente Aussagen darstellen. In der Tat sind diese Zusammenhänge in der von uns zitierten Abhandlung von K. WAGNER vollständig abgeklärt worden[2]). Der hier nachgetragene Tatbestand ist für die Erwägung der Chance, auf diesem Wege das berühmte Färbungsproblem lösen zu können, von ziemlicher Bedeutung, und dürfte erneuten Studien in dieser Richtung, wie sie beispielsweise von G. A. DIRAC durchgeführt wurden, erneute Impulse verleihen. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 327. Man konstruiere jenen Kegelschnitt, der einen nullteiligen Kreis k in konjugiert imaginären Punkten T, $\overline{T}$ berührt und durch einen reellen Punkt Q geht.

E. DOMKOWITSCH, Wien

Lösung des Aufgabenstellers: Sei k_r der reelle Vertreter des nullteiligen Kreises k (siehe Figur), Q der gegebene Kegelschnittspunkt, p der reelle Träger der Punkte T, $\overline{T}$ und P der Pol von p bezüglich k (Antipol bezüglich k_r). Die reellen Vertreter T_r, $\overline{T}_r$ von T, $\overline{T}$



liegen bekanntlich[1]) auf dem durch die Endpunkte des zu p parallelen Durchmessers von k_r gehenden Kreis l mit der Mitte R' auf p. Die Gerade PQ trifft p in R. Jener Punkt Q' von PQ, der von Q durch P und R harmonisch getrennt wird, liegt dann auch auf dem zu suchenden Kegelschnitt c (Polareigenschaft). Die Hauptscheitel A, B von c, welche aus Symmetriegründen auf dem zu p normalen Durchmesser d von k_r liegen, bestimmen mit Q, Q' ein

[2]) Math. Ann. *114*, 570–590, insb. 573 (1937).

vollständiges Viereck, in welchem P eine Diagonalecke ist. Die restlichen Diagonalecken E, F liegen auf p. Sie gehören einerseits der Involution konjugierter Punkte bezüglich c auf p an und werden anderseits durch R' und R harmonisch getrennt. Somit sind E, F als gemeinsames Punktepaar zweier Involutionen festgelegt und ergeben sich hier sofort als Gegenpunkte eines durch $L = d\,l$ gehenden Kreises $m(M, \overline{ML})$ bezüglich dessen R und d Pol und Polare sind ($RL \perp LM$). Damit sind aber die Hauptscheitel A, B von c als restliche Ecken des erwähnten vollständigen Vierecks bestimmt. Die Nebenscheitel C, D finden wir nun leicht auf bekannte Weise (zum Beispiel mit der umgekehrten Papierstreifenkonstruktion).

Auch im Sinne der darstellenden Geometrie lässt sich eine schöne Lösung angeben: Deuten wir k_r als Distanzkreis einer Perspektive (k = Zentralbild des absoluten Kegelschnittes), so ist der zu ermittelnde Kegelschnitt c der scheinbare Zentralumriss einer Kugel γ, welche den durch den gegebenen Punkt Q gehenden Sehstrahl berührt. Die Gerade $p = T\overline{T}$ ist dabei die Flucht der Ebene des wahren Kugelumrisses. Die Kugelmitte kann dann auf dem zu der erwähnten Ebene normalen Sehstrahl beliebig angenommen und γ samt c auf bekannte Weise konstruiert werden.

Zwei andere, allerdings konstruktiv weniger praktische Lösungen beständen darin, c zentralkollinear auf einen durch $T, \overline{T}$ gehenden oder die konjugiert imaginären Tangenten in $T, \overline{T}$ an k berührenden Kreis zu beziehen.

Eine weitere Lösung legte K. GRÜN (Linz) vor.

Aufgabe 328. T ist ein Punkt einer Tschirnhausen-Kubik k, t die Tangente in T an k und S der Schnittpunkt von t mit der Scheiteltangente a von k. P und Q sind ferner jene Punkte von t, die die Strecke ST von innen bzw. von aussen im Verhältnis 1 : 2 teilen. Bestimme den Ort dieser Punkte P und Q, wenn T die Kubik k durchläuft, und untersuche den Zusammenhang zwischen der Kurve $\{Q\}$ und der Evolute der Kurve $\{P\}$.

R. BEREIS, Dresden, und H. BRAUNER, Wien

Lösung der Aufgabensteller: Die Tschirnhausen-Kubik k ist bekanntlich die negative Fusspunktkurve einer Parabel p in bezug auf deren Brennpunkt F. Gleitet also ein Schenkel s eines rechten Winkels durch den Brennpunkt F von p, während der Winkelscheitel R die Parabel p durchläuft, so umhüllt der zweite Schenkel t die Tschirnhausen-Kubik k. Die Normale auf s in F schneidet die Parabelnormale n von R im zugehörigen Momentanzentrum M. Der Lotfusspunkt von M auf t ist daher der Berührpunkt T von t mit k. Ist V der Schnittpunkt der Parabeltangente t_1 in R mit der Parabelachse und U der Schnittpunkt der Kubiktangente t mit dem Achsenlot in V, so ist nach elementaren Parabeleigenschaften das Viereck $FVUR$ ein Deltoid und das Viereck $MFUR$ ein Parallelogramm. Daher gilt: $\overline{TR} = \overline{MF} = \overline{RU}$. Die Scheiteltangente a der Parabel p – gleichzeitig auch Scheiteltangente der Kubik k – halbiert bekanntlich die Strecke $\overline{RV}$ und schneidet damit auch $\overline{RU}$ in ihrem Mittelpunkt S. R teilt somit die Strecke $\overline{ST}$ im Verhältnis 1:2 von innen und ist mit P identisch. Die Parabel p ergibt sich demnach als Ort der Punkte P.

Man erhält bekanntlich die Krümmungsmitte K des Punktes P $(=R)$ der Parabel durch Verdoppelung der Strecke PM. Verbindet man nun K mit F und schneidet diese Gerade mit der Kubiktangente t, so ergibt sich der gesuchte Punkt Q, da $\overline{PU} = \overline{UQ}$ und daher $\overline{TS} = \overline{SU}$ gilt. Die Punkte M, U, F sind die Seitenmitten des Dreiecks QKP, der Punkt Q ist daher das Spiegelbild von K bezüglich F.

Zusammenfassend gilt: Teilt man bei einer Tschirnhausen-Kubik die Tangentenstrecke zwischen ihrer Scheiteltangente und dem Berührpunkt harmonisch im Verhältnis 1:2, so liegen alle inneren Teilungspunkte auf ihrer Fusspunktparabel, während die äusseren Teilungspunkte eine Neilsche Parabel erfüllen, die zur Evolute der genannten Parabel bezüglich ihres Brennpunktes symmetrisch liegt.

Eine rechnerische Lösung legte R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England) vor.

---

[1]) Siehe etwa E. MÜLLER und E. KRUPPA, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, I. *Die linearen Abbildungen* (Deuticke 1923), S. 35f.

Aufgabe 329. Man beweise, dass aus der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+x_i} \geqq n \qquad (x_i > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i} \geqq n^{n+1}$$

folgt. J. BERKES, Szeged

Lösung: Da die Summe von $n-1$ Summanden aus $\sum$ kleiner als $n-1$ ist, muss die Summe von je zwei Summanden >1 sein. Hieraus folgt $x_i x_k < 1$, denn aus $x_i x_k \geqq 1$ würde sich

$$\frac{1}{1+x_i} + \frac{1}{1+x_k} \leqq 1$$

ergeben. Es sei nun x_1 das kleinste und x_2 das grösste der x_i, wobei wir $x_1 < x_2$ annehmen dürfen, da im Falle, dass alle x_i gleich sind, die Richtigkeit der Behauptung sofort bestätigt werden kann. Ersetzt man in $\sum$ x_1 und x_2 durch $\sqrt{x_1 x_2}$, so wächst $\sum$. Die Ungleichung

$$\frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+y} < \frac{2}{1+\sqrt{y\, x_2}}$$

ist nämlich sicher richtig für $y = 0$. Wächst y bis x_1, so kann die Ungleichung nie in eine Gleichung übergehen, da aus einer solchen

$$(y - x_2)^2\,(1 - x_2\, y) = 0$$

folgen würde, während $y \leqq x_1 < x_2$ und $x_2 y \leqq x_2 x_1 < 1$ gilt. Also ist $\sum' > \sum$ aber $\prod' = \prod$. Ersetzt man in $\sum$ aber x_1 und x_2 durch $x_2' = x_1' = \lambda \sqrt{x_1 x_2}$ und wählt λ so, dass $\sum' = \sum$ wird, so wird $\lambda > 1$ und also $\prod' < \prod$.

Wiederholt man das Verfahren, indem man wieder die kleinste und die grösste unter den $n+1$ Zahlen $x_1', x_2' = x_1', x_3, \ldots, x_{n+1}$ durch ihr geometrisches Mittel ersetzt und mit einem geeigneten Faktor λ' multipliziert, so dass $\sum$ konstant bleibt, so nimmt $\prod$ beständig ab. Die Folge der Minima der $n+1$ x-Werte wächst dabei monoton, bleibt aber wegen $x_i x_k < 1$ beschränkt. Sie konvergiert also nach einem Grenzwert x_0, nach welchem dann auch die Maxima und damit alle x_i konvergieren müssen. Dann ist aber $x_0 \leqq 1/n$, also $\prod_0 \geqq n^{n+1}$. Die Behauptung wird also wegen $\prod > \prod_0$ bestätigt.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass mittels des obigen Resultates der in seinem Artikel *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung* [El. Math. *12*, 121–123 (1957)] bewiesene Satz sofort für ein n-dimensionales Simplex hergeleitet werden kann.

Weitere Lösungen sandten L. HUBER (Stuttgart), F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (Stockdorf, Starnberg).

Aufgabe 330. Ein Dreieck mit den Winkeln α_i $(i = 1, 2, 3)$ habe ϱ und r als In- und Umkreisradius. 2σ sei der Umfang des von den Berührungspunkten des Inkreises gebildeten Dreiecks. Man beweise die Beziehung

$$8 \sum_{i=1}^{3} \left(\cos\frac{\alpha_i}{4}\right)^4 - \frac{\varrho}{r} - \frac{4\sigma}{\varrho} = 10\,.$$

F. LEUENBERGER, Zuoz

Lösung: Es ist

$$\sigma = \varrho \sum \cos\frac{\alpha_i}{2}\,, \qquad \varrho = 4\, r \prod \sin\frac{\alpha_i}{2}\,.$$

Ferner gilt

$$4\sum\left(\cos\frac{\alpha_i}{4}\right)^4=\sum\left(1+\cos\frac{\alpha_i}{2}\right)^2=3+2\sum\cos\frac{\alpha_i}{2}+\sum\cos^2\frac{\alpha_i}{2}.$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt unmittelbar mittels der Beziehung

$$\sum\cos^2\frac{\alpha_i}{2}=2-\sin^2\frac{\alpha_1}{2}-\sin^2\frac{\alpha_2}{2}+\sin^2\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

$$=2+2\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_2}{2}-\sin\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

$$=2+2\prod\sin\frac{\alpha_i}{2}.$$

R. LAUFFER, Graz

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. BERKES (Szeged), E. HERRMANN (Porz, Rhein), L. HUBER (Stuttgart), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), J. SCHOPP (Budapest), R. WHITEHEAD (St. Yves, Cornwall/England), I. ZANA (Budapest).

Aufgabe 331. Es sei p eine Primzahl, $n=p^r h$, $(p,h)=1$. Man zeige, dass für das Kreisteilungspolynom $\Phi_n(x)$ vom Grad $\varphi(n)$ in einem Körper der Charakteristik p die Zerlegung

$$\Phi_n(x)=[\Phi_h(x)]^{\varphi(n/h)}$$

gilt (vgl. Aufgabe 293).

A. BAGER, Hjørring

1. Lösung: Wir wenden Induktion nach n an. Die Zerlegung

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x)$$

hat bekanntlich (Induktionsbeweis leicht!) ganzrationale Koeffizienten. Sie gilt auch mod p. In einem Körper der Charakteristik p, in dem x^h-1 in Linearfaktoren zerfällt, hat $x^n-1=(x^h-1)^{p^r}$ genau die h-ten Einheitswurzeln als p^r-fache Nullstellen. $\Phi_n(x)$ hat sicher keine primitive d-te Einheitswurzel δ mit $d|h$, $d<h$, als Nullstelle; denn δ kommt unter den Nullstellen der Polynome $\Phi_{dp^k}(x)$, $k=0,1,\ldots,r$ nach Induktionsvoraussetzung schon mit den Vielfachheiten 1, $(p-1)\,p^{k-1}$ $(k>0)$ vor, also insgesamt mit der Vielfachheit p^r. Also sind die Nullstellen von $\Phi_n(x)$ genau die primitiven h-ten Einheitswurzeln. Diese kommen auch noch als Nullstellen von $\Phi_{hp^k}(x)$, $k<r$, vor, und zwar jeweils alle in gleicher Vielfachheit, wie man der Induktionsvoraussetzung entnimmt. Also haben sie auch als Nullstellen von $\Phi_n(x)$ alle die gleiche Vielfachheit m. Es folgt

$$\Phi_n(x)=[\Phi_h(x)]^m.$$

Wegen $\varphi(n)=\varphi(h)\cdot\varphi(p^r)$ folgt $m=\varphi(p^r)$, wie behauptet.

H. LENZ, München

2. Lösung: For $n=p^r h$, $(p,h)=1$,

$$\Phi_n(x)=\prod_{dt=n}(x^d-1)^{\mu(t)}=\prod_{dt=h}(x^{p^r d}-1)^{\mu(t)}\prod_{dt=h}(x^{p^{r-1}d}-1)^{\mu(pt)}$$

$$=\prod_{dt=h}(x^d-1)^{(p^r-p^{r-1})\,\mu(t)}=\{\Phi_h(x)\}^{\varphi(p^r)}.$$

L. CARLITZ, Durham, N.C., USA

Aufgabe 332. Show that

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n\,(n+1)}\right)=\frac{1}{\pi}\sin\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\pi\right\}.$$

L. CARLITZ, Durham, N. C. (USA)

Lösung: Aus der bekannten Produktdarstellung des Sinus folgt

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/n}$$

$$= (1 + x)\, e^{-x} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) e^{-x/(n+1)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{x/n}$$

$$= (1 + x)\, e^{-x} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2 + x}{n\,(n+1)}\right) e^{x/n(n+1)} .$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

konvergiert das letzte Produkt auch ohne den Exponentialfaktor. Man erhält also

$$\frac{\sin \pi x}{\pi\,(x^2 + x)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2 + x}{n\,(n+1)}\right). \qquad (*)$$

Für $x^2 + x = 1$ wird

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. (Die zweite Lösung x_2 führt auf denselben Wert des Produktes.)

W. SCHLUP, Zürich

Ersetzt man in (*) x durch $-x$, so erhält man eine bekannte Formel (vgl. PÓLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. 1, S. 128). Auf dieser Formel beruht die Lösung von A. BAGER (Hjørring) und diejenige des Aufgabenstellers. Dieser weist darauf hin, dass allgemeinere Formeln von M. MIKOLÁS [*On a Class of Infinite Products Whose Value Can Be Expressed in Closed Form*, Acta sci. math. *16*, 58–62 (1955)] angegeben wurden.

Weitere Lösungen sandten E. HERRMANN (Porz, Rhein) und H. MEILI (Winterthur).

Neue Aufgaben

366. An eine Parabel werden drei beliebige Tangenten gelegt. Man beweise, dass das Produkt der Krümmungsradien in den Berührungspunkten gleich dem 64fachen Kubus des Umkreisradius des aus den Tangenten gebildeten Dreiecks ist.

A. CZWALINA, Berlin

367. Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Bedeutet R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ den Abstand $\overline{OA_i}$, r_i den Abstand der Seitenfläche $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ von O, so gelten die Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{R_i}{3 \cdot 2^n r_i + (4 - 2^n)\, R_i} \geqq 1 \quad (n = 0, 1, 2)\,.$$

Gleichheit tritt nur ein, wenn O Mittelpunkt eines regulären Tetraeders ist. Man beweise diese Ungleichungen.

Ist O analog innerer Punkt eines Dreiecks $A_1A_2A_3$, R_i $(i = 1, 2, 3)$ der Abstand $\overline{OA_i}$, r_i der Abstand der Seite $A_{i+1}A_{i+2}$ von O, so gilt ein entsprechendes Ungleichungssystem. Wie heisst es[1]?

L. LEUENBERGER, Zuoz

[1]) Vgl. dazu J. BERKES, *Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung*, El. Math. *12*, 121–123 (1957).

368. Es sei $f(x)$ im endlichen Intervall $a \leqq x \leqq b$ positiv und beschränkt. Man beweise, dass es in diesem Intervall zwei Zahlen x_1 und x_2 gibt, für die

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4}\,(b - a)\, f(a)$$

gilt. O. REUTTER, Ochsenhausen (Deutschland)

369. Es gibt Quadratzahlen, bei denen in dekadischer Schreibweise auf die Einer eine Anzahl gleicher Ziffern folgen, zum Beispiel $3333^2 = 11108889$. Wie muss man die ersten beiden Ziffern (im Beispiel 9 und 8) wählen, damit die Übereinstimmung der Ziffern von der zweiten bis zur k-ten Stelle für beliebiges k durch Quadratzahlen realisierbar ist? R. WAGNER, Karlsruhe

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Stelle im gleichen Koordinatensystem graphisch dar ($a \triangleq 4$ cm):

$$\varrho_1 = a\,(1 + \cos\varphi)\,, \qquad \varrho_2 = a\,(1 - \cos\varphi)\,,$$

und berechne die von den beiden Figuren gemeinsam überdeckte Fläche.
▶ $f = a^2\,(1{,}5\,\pi - 4)$.

2. Die von der Kurve

$$\varrho = 5\,(1 + \cos\varphi) \qquad (1 \triangleq 1\ \text{cm})$$

eingeschlossene Fläche ist durch eine Senkrechte zum Nullstrahl zu halbieren.
▶ Lösung mittels graphischer Integration, der Abstand der gesuchten Gerade von der Spitze der Kardioide beträgt 4,1 cm.

3. Auf einem Kreis mit dem Radius r befinden sich der feste Punkt O (Ursprung des Koordinatensystems, Nullstrahl durch das Kreiszentrum) und der bewegliche Punkt Q. L ist Normalprojektion von O auf die Kreistangente in Q, auf der Tangente bestimmt man $PL = LQ$. Stelle die Gleichung des geometrischen Ortes von P in Polarkoordinaten auf und berechne die Fläche, die der Radiusvektor überstreicht, wenn P die Kurve einmal durchläuft.
▶ $\varrho = 2\,r \cdot \cos\varphi/3$, Kreiskonchoide. $f = 3\,\pi\,r^2$.

4. In einer Ebene liegen die Kreise $k_1\,(M_1, r_1)$ und $k_2\,(M_2, r_2)$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, in dem sich eine Tangente t_1 von k_1 und eine solche von k_2 unter rechtem Winkel schneiden?
▶ Der geometrische Ort besteht aus zwei bezüglich M_1M_2 symmetrischen Kreiskonchoiden. Die Parallelen zu den Tangenten durch M_1 bzw. M_2 mögen sich in Q schneiden. Die Strecke PQ und der Winkel $t_1\,PQ$ sind konstant, die Gerade PQ geht durch einen festen Punkt auf dem Kreis mit dem Durchmesser M_1M_2.

5. Die Achsen zweier Drehkegelflächen sind erstprojizierend und liegen in derselben Hauptebene. Die Spitze der einen ist S_1 (7; 7; 8), ihr Öffnungswinkel beträgt 60°; die Spitze S_2 der anderen hat die Abszisse 10 und liegt auf einer Mantellinie der ersten, ihr Öffnungswinkel beträgt 120°. Konstruiere die Schnittkurve der beiden Flächen.
▶ Grundriss: Kreiskonchoide, Aufriss: Parabelbogen.