

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 14 (1959)  
**Heft:** 5  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Ungelöste Probleme

**Nr. 32.** For real  $t$  let  $\|t\|$  denote the positive distance between  $t$  and the integer nearest to  $t$ , and let  $f$  be a nonincreasing function such that  $0 < f(n) < 1/2$  for  $n = 1, 2, \dots$ . It is a classical result of KHINTSCHINE that the inequality  $\|n\alpha\| < f(n)$  has infinitely many solutions for almost all  $\alpha$  or almost no  $\alpha$ , according as the series  $\sum f(n)$  diverges or converges. KHINTSCHINE's theorem can also be stated in this form: Let  $S_n$  be the interval symmetric about 0, of length  $f(n)$ , and let  $T_n$  be the union of all the translations of  $S_n$  through integer distances. Then the assertion ' $n\alpha \in T_n$  for infinitely many  $n$ ' is true for almost all  $\alpha$  or almost no  $\alpha$ , according as  $\sum f(n)$  diverges or converges.

What can be said if  $S_n$  is a more complicated set in  $[0,1]$ , of total length (or measure)  $f(n)$ ? On the basis of a crude probability argument, it is to be expected that the nature of  $S_n$  is immaterial, and that only its measure is of significance.

In case  $S_n$  consists of the intervals of length  $f(n)/n^k$  symmetric about the points  $0, 1/n^k, 2/n^k, \dots, (n^k - 1)/n^k$ , where  $k$  is a fixed nonnegative integer, the relation  $n\alpha \in T_n$  is equivalent to

$$\left| n\alpha - \frac{j}{n^k} - m \right| < \frac{f(n)}{n^k} \quad \text{for some integers } j, m$$

or

$$\|n^{k+1}\alpha\| < f(n). \quad (*)$$

It has recently been proved by ERDÖS<sup>1)</sup> in the case  $k = 0$ , and LE VEQUE<sup>2)</sup> in the case  $k > 0$ , that if  $\sum f(n)$  converges, inequality (\*) has only finitely many solutions for almost all  $\alpha$ , while if  $\sum f(n)$  diverges, the number of solutions  $n < N$  of (\*) is, for almost all  $\alpha$ , asymptotically equal to  $\sum_1^N f(n)$ . It is also shown<sup>2)</sup> that the corresponding theorem holds with certain other sequences  $\{a_n\}$  in place of  $\{n^{k+1}\}$  in (\*), but there appears to be nothing known about the situation when  $S_n$  is not composed of finitely many intervals.

A large part of the theory of diophantine approximations is susceptible of the same kind of generalization, in which inequalities are replaced by set inclusions. The proofs will require many new ideas.

W. J. LE VEQUE

## Aufgaben

**Aufgabe 322.** Es sei  $D_n = |a_{i,k}|$  die Determinante  $n$ -ten Grades, in der das allgemeine Element  $a_{i,k}$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $i$  und  $k$  ist. Man beweise, dass

$$D_n = n! \prod_{p \leq n} (1 - p)^{[n/p]},$$

wo das Produkt über alle Primzahlen  $p \leq n$  erstreckt wird und  $[\alpha]$  die grösste ganze Zahl  $\leq \alpha$  bedeutet.

P. TURAN, Budapest

<sup>1)</sup> P. ERDÖS, *Two Theorems on Diophantine Approximation*, to appear in Acta Arithmetica.

<sup>2)</sup> W. J. LE VEQUE, *On the Frequency of Small Fractional Parts in Certain Real Sequences*, III, to appear in J. reine angew. Math.

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir werten die allgemeinere Determinante  $D_n(t) = |[i, k]^t|$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) aus, wobei  $t$  eine reelle oder komplexe Zahl ist. Dazu betrachten wir zuerst die Determinante  $\Delta_n(f) = |f((i, k))|$ , wo  $(i, k)$  der grösste gemeinsame Teiler von  $i$  und  $k$  ist und  $f(x)$  eine beliebige für  $x = 1, 2, \dots, n$  definierte Funktion bedeutet. Für  $m = 1, 2, \dots, n$  definieren wir  $g(m)$  durch

$$g(m) = \sum_{d|m} \mu(d) f\left(\frac{m}{d}\right);$$

somit ist nach der Möbiusschen Umkehrformel

$$f(m) = \sum_{d|m} g(d). \quad (1)$$

Wir behaupten nun, dass

$$\Delta_n(f) = g(1) g(2) \cdots g(n). \quad (2)$$

Um (2) zu beweisen, sei

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i \equiv 0 \pmod{k}, \\ 0 & \text{für } i \not\equiv 0 \pmod{k}. \end{cases}$$

Für die Determinanten  $B_1 = |a_{ik}|$  und  $B_2 = |a_{ik} g(k)|$  gilt

$$B_2 = g(1) g(2) \cdots g(n) B_1.$$

Da die Hauptdiagonale von  $B_1$  aus lauter Einsen besteht und über der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, so ist  $B_1 = 1$  und  $B_2 = g(1) g(2) \cdots g(n)$ . Jetzt bilden wir das Produkt  $B_1 B_2$  durch Komposition von Zeilen mit Zeilen. Das  $s$ -te Glied der  $r$ -ten Reihe von  $B_1 B_2$  wird nach (1)

$$\sum_{j=1}^n a_{rj} a_{sj} g(j) = \sum_{j \mid (r, s)} g(j) = f((r, s)).$$

Also ist  $B_1 B_2 = \Delta_n(f)$ , und (2) ist bewiesen<sup>1)</sup>. Aus (2) folgt nicht nur der Wert von  $D_n(t)$ , sondern allgemeiner der Wert von  $d_n(F) = |F([i, k])|$ , wenn  $F(x)$  für  $x = 1, 2, \dots, n$  definiert ist und für alle positiven ganzen  $a$  und  $b$  die Bedingung

$$F(a b) = F(a) F(b) \quad (3)$$

erfüllt ist. Man hat nämlich

$$d_n(F) = \left| F\left(\frac{i k}{(i, k)}\right) \right| = \left| \frac{F(i) F(k)}{F((i, k))} \right| = (F(1) F(2) \cdots F(n))^2 \left| \frac{1}{F((i, k))} \right|.$$

Wenn man (2) mit  $f(x) = 1/F(x)$  anwendet, so folgt

$$\begin{aligned} d_n(F) &= (F(1) F(2) \cdots F(n))^2 \prod_{m=1}^n \left( \sum_{d|m} \mu(d) \frac{1}{F\left(\frac{m}{d}\right)} \right) \\ &= F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{m=1}^n \sum_{d|m} \mu(d) F(d) \\ &= F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{m=1}^n \prod_{p|m} (1 - F(p)). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> (2) folgt auch aus Aufgabe 33, S. 122, in PÓLYA-SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II.

Also ist

$$d_n(F) = F(1) F(2) \cdots F(n) \prod_{p \leq n} (1 - F(p))^{[n/p]}.$$

Da für  $F(x) = x^t$  die Bedingung (3) erfüllt ist, so folgt

$$D_n(t) = (n!)^t \prod_{p \leq n} (1 - p^t)^{[n/p]}.$$

L. CARLITZ (Durham N.C./USA) benutzt das in 1) erwähnte Resultat. Er stellt den Zusammenhang mit der Formel von H. J. S. SMITH:

$$H_n = |(r, s)| = \varphi(1) \varphi(2) \cdots \varphi(n)$$

her in der Form

$$D_n = (-1)^e [1, 2, \dots, n] H_n, \quad e = \sum_{p \leq n} \left[ \frac{n}{p} \right].$$

Weitere Lösungen sandten B. L. J. BRAAKSMA (Groningen) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England).

**Aufgabe 323.** Drei durch denselben Punkt  $O$  gehende Kreise  $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$  vom gleichen Halbmesser  $r$  mögen sich in drei weiteren Punkten  $P_{12}, P_{23}, P_{31}$  schneiden. Es ist zu zeigen, dass der Kreis  $\mathfrak{K}$  durch diese drei Punkte zu den gegebenen Kreisen kongruent ist.

H. HEINRICH, Dresden

1. *Lösung:* Die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Kreise liegen auf dem Kreis  $\mathfrak{K}'$  mit dem Radius  $r$  um  $O$ . Spiegelt man nun den Umkreismittelpunkt  $O$  eines Dreiecks an dessen Seiten, so «streckt» man das Seitenmittendreieck desselben aus  $O$  mit dem Vergrösserungsverhältnis 2:1 und erhält so ein zum gegebenen Dreieck zentrale symmetrisches Dreieck, dessen Umkreis  $\mathfrak{K}$  also kongruent mit  $\mathfrak{K}'$  ist. Bewerkstelligt man diese Spiegelungen durch die Schnittpunkte von Kreisen um die Ecken  $M_1, M_2, M_3$  durch  $O$ , so bilden diese mit  $\mathfrak{K}$  gerade die fragliche Konfiguration.

G. UNGER, Dornach

Ähnliche Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), R. BEREIS (Dresden), J. BERKES (Szeged), B. L. J. BRAAKSMA (Groningen), S. ELGERSMA (Cornwerd, Holland), E. HERRMANN (Porz am Rhein), L. KIEFFER (Luxemburg), J. LANGR (Prag), J. A. PEDERSEN (Poulstrup, Dänemark), J. POGÁNY (Budapest), F. PROWAZNIK (Wien), G. SELTMANN (Dresden), J. SCHOPP (Budapest), E. SZODORAY (Debrecen).

2. *Lösung:* Wählt man den Grundpunkt  $O$  als Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems und fasst die Zeichenebene als Gaußsche Zahlenebene auf, dann werden die Mitten  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der gegebenen drei Kreise  $k_i$  durch komplexe Zahlen  $M_i$  beschrieben (Punkte und entsprechende komplexe Zahlen sollen durch die gleichen lateinischen Grossbuchstaben gekennzeichnet werden), für deren Absolutbeträge die Relation

$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = r \tag{1}$$

gilt. Die Restschnitte der Kreise  $k_i$

$$P_{12} = M_1 + M_2, \quad P_{23} = M_2 + M_3, \quad P_{31} = M_3 + M_1 \tag{2}$$

haben von dem Punkt  $M = M_1 + M_2 + M_3$  die Entferungen

$$|\overrightarrow{P_{12}M}| = |M - P_{12}| = |M_3|, \quad |\overrightarrow{P_{23}M}| = |M - P_{23}| = |M_1|, \quad |\overrightarrow{P_{31}M}| = |M - P_{31}| = |M_2|,$$

die zufolge (1) alle gleich  $r$  sind. Damit ist die Kongruenz des Umkreises des Dreiecks  $(P_{12}, P_{23}, P_{31})$  zu den gegebenen Kreisen  $k_i$  bewiesen und eine Konstruktion seiner Mitte  $M$  gegeben.

R. BEREIS, Dresden

Eine ähnliche Lösung sandten G. GEISE (Dresden) und R. C. YOUNG (London). Weitere Lösungen gingen ein von R. BEREIS (Dresden), J. BREJCHA (Brno), F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München), E. PETHES (Budapest), R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England), I. ZANA (Budapest).

**Aufgabe 324.** Man bestimme das Maximum des Umfanges eines der Einheitskugel einbeschriebenen rechtwinkligen windschiefen Fünfecks. E. TROST, Zürich

*Lösung:* Es seien  $A, B, C$  Punkte der Einheitskugel und  $A^*, B^*, C^*$  deren Spiegelbilder bezüglich des Kugelmittelpunktes. Falls die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$  einen rechten Winkel bilden, können sie zwei Nachbarsseiten eines der Einheitskugel einbeschriebenen rechtwinkligen windschiefen Fünfecks  $ABCDE$  sein. Für die anderen Fünfeckseiten gilt offenbar:

- (1)  $\overline{CD}$  ist eine Sehne des Kreises  $CA^*B^*$ .
- (2)  $\overline{DE}$  und  $\overline{B^*C^*}$  liegen in derselben Ebene. (Man betrachte  $B, C, D$  als Ausgangspunkte und verwende die zu (1) analoge Aussage.)
- (3)  $\overline{EA}$  ist eine Sehne des Kreises  $AB^*C^*$ .
- (4)  $\overline{DE}$  und  $\overline{A^*B^*}$  liegen in derselben Ebene. (Man betrachte  $E, A, B$  als Ausgangspunkte und verwende die zu (3) analoge Aussage.)

Aus (2) und (4) folgt:

- (5)  $\overline{DE}$  ist eine Sehne des Kreises  $A^*B^*C^*$ .

Weiterhin folgt aus (1), (3) und (5):

- (6)  $D \equiv A^*$  oder  $D \equiv B^*$  und (7)  $E \equiv B^*$  oder  $E \equiv C^*$ .

Aus (6) und (7) folgt, dass zu den Punkten  $A, B, C$  nur folgende Fünfecke gehören können:  $ABCA^*B^*$ ,  $ABCA^*C^*$ ,  $ABCB^*C^*$ . Je vier Eckpunkte dieser Fünfecke liegen auf einem Grosskreis der Einheitskugel und bilden ein diesem Kreis eingeschriebenes Rechteck. Liegen zum Beispiel  $B, C, D, E$  auf einem Grosskreis, so ist ihre Lage durch die willkürlich gegebene Kugelsehne  $\overline{CD}$  eindeutig bestimmt. Bei festem  $\overline{CD}$  hat das Fünfeck maximalen Umfang, wenn  $\overline{EA} = \overline{AB}$ , denn von allen einem Kreis eingeschriebenen Dreiecken mit der festen Grundlinie  $\overline{EB}$  hat das gleichschenklige bekanntlich den maximalen Umfang. Setzen wir  $\overline{CD} = x$ , so erhalten wir für den Umfang  $y$  des Fünfecks den Ausdruck

$$y = x + x \sqrt{2} + 2 \sqrt{4 - x^2}.$$

Hieraus folgt nach einfacher Rechnung

$$y_{\max} = 2 \sqrt{7 + 2 \sqrt{2}}.$$

J. ERDÖSI, Budapest

Eine Lösung legten auch F. PROWAZNIK (Wien) und I. ZANA (Budapest) vor.

**Aufgabe 325.** Es sei  $a_i = 2$  oder  $a_i = 3$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Man beweise, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}$$

nur dann rational sein kann, wenn die Folge  $a_i$  periodisch ist. P. ERDÖS, Toronto

*Lösung:* Die Aufgabe lässt sich in der folgenden Weise verallgemeinern:

Es sei  $a_i = a$  oder  $a_i = b$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  mit  $2 \leq a < b$ . Man beweise, dass

$$\frac{1}{a_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

nur dann rational sein kann, wenn die Folge  $a_i$  periodisch ist ( $a, b$  ganz).

*Beweis:* Wir setzen

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{a_\nu a_{\nu+1} \cdots a_k} \quad (\nu = 1, 2, 3, 4, \dots). \quad (1)$$

Dann ist

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{a_\nu} \left( 1 + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} \right). \quad (2)$$

Es ist wegen  $a_\nu = a$  oder  $b$  und  $a < b$  für  $\nu = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{1}{b-1} = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{b^{k+1-\nu}} \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{a^{k+1-\nu}} = \frac{1}{a-1} \leq 1. \quad (3)$$

Wenn  $a_\nu = a$ , dann ergibt sich aus (2) und (3)

$$\frac{b}{a(b-1)} = \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{1}{b-1} \right) \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{1}{a-1} \right) = \frac{1}{a-1}.$$

Wenn  $a_\nu = b$ , dann ist

$$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b} \left( 1 + \frac{1}{b-1} \right) \leq \frac{1}{\alpha_\nu} \leq \frac{1}{b} \left( 1 + \frac{1}{a-1} \right) = \frac{a}{b(a-1)}.$$

Wegen  $2 \leq a < b$  ist

$$\frac{a}{b(a-1)} < \frac{b}{a(b-1)}.$$

Die  $1/\alpha_\nu$  fallen mithin in die beiden durchschnittsleeren Intervalle

$$I_1 = \left\langle \frac{1}{b-1}, \frac{a}{b(a-1)} \right\rangle, \quad I_2 = \left\langle \frac{b}{a(b-1)}, \frac{1}{a-1} \right\rangle.$$

Wenn

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k}$$

noch eine zweite Darstellung

$$\frac{1}{\alpha_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a'_1 a'_2 \cdots a'_k}$$

mit  $a'_i = a$  oder  $b$  und mit  $2 \leq a < b$  hat, dann muss  $a_1 = a'_1$  sein, weil  $1/\alpha_1$  nicht gleichzeitig in  $I_1$  und in  $I_2$  liegen kann. Nach (2) muss dann aber  $1/\alpha_2 = 1/\alpha'_2$  sein. Jetzt kann man schliessen, dass  $a_2 = a'_2$  ist, weil  $1/\alpha_2$  nicht sowohl in  $I_1$  als auch in  $I_2$  liegen kann, usw. Für alle  $\nu$  ist  $a_\nu = a'_\nu$ . Die Darstellung (1) ist eindeutig.

Aus (2) folgt

$$\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{a_\nu}{\alpha_\nu} - 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Ist  $1/\alpha_1$  rational, das heisst  $1/\alpha_1 = m/n$ , dann ist auch  $1/\alpha_2 = (a_1 m - n)/n$  rational mit dem gleichen Nenner. Entsprechend schliesst man für  $\nu = 3, 4, \dots$ . Alle  $1/\alpha_\nu$  sind rational mit dem Nenner  $n$ .  $1/\alpha_\nu$  ist also von der Form

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}.$$

Unter den Zahlen  $1/\alpha_v$  müssen gleiche vorkommen. Es sei etwa

$$\frac{1}{\alpha_{h+k}} = \frac{1}{\alpha_h}.$$

Dann folgt aus der Eindeutigkeit der Darstellung von  $1/\alpha_v$  ( $v = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_{h+k} = a_h$$

und wegen (2)

$$\frac{1}{\alpha_{h+k+1}} = \frac{1}{\alpha_{h+1}}.$$

Daraus ergibt sich

$$a_{h+k+1} = a_{h+1} \quad \text{usw.}$$

Allgemein

$$a_{h+k+v} = a_{h+v},$$

das heisst, die Folge der  $a_v$  ist periodisch.

E. HERRMANN, Porz am Rhein

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe falsch wird, wenn  $a_i$  ausser 2 oder 3 auch 4 sein kann.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), J. C. BINZ (Bern), H. MEILI (Winterthur).

**Aufgabe 326.** Es sei  $m$  eine gegebene natürliche Zahl. Wieviele Tripel  $(i, j, k)$  natürlicher Zahlen gibt es, die den Bedingungen

$$i < j = i + 2 \neq 1 < k = j + 2 \neq 1 \leq 2m + 3$$

genügen?

R. LAUFFER, Graz

*Lösung:* Die Anzahl der Tripel sei  $f(m)$ .  $f(m+1)$  setzt sich zusammen aus 1. den Tripeln mit  $k \leq 2m+3$ , 2. den Tripeln mit  $k = 2m+4$  (für welche  $i$  gerade und  $j > i$  ungerade ist), 3. den Tripeln mit  $k = 2m+5$  (für welche  $i$  ungerade und  $j > i$  gerade ist). Es ist also

$$f(m+1) = f(m) + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{2} = f(m) + (m+2)^2.$$

Da  $f(0) = 1$ , so wird

$$f(m) = 1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Weitere Lösungen legten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), E. HERRMANN (Porz am Rhein), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (München) und R. WHITEHEAD (St. Ives, Cornwall/England) vor.

## Neue Aufgaben

362. Prove that the equation

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3$$

has no solution in non-negative integers  $x, y$ .

A. MAKOWSKI, Warsaw/Poland

363. Es sind bekannt der Umkugelradius  $R$ , der Inkugelradius  $r$  und der Winkel  $\alpha$  zweier Nachbarkanten eines gleichflächigen Tetraeders. Man konstruiere das Tetraeder.

J. SCHOPP, Budapest

364. Man bestimme die Nullstellen des Polynoms

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^k \binom{k-n}{n} x^{k-2n}.$$

R. WAGNER, Karlsruhe

365. Es sei  $n = 1, 2, 3, \dots, 0 < a_1, a_2, \dots, a_n$  und  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Man beweise die Abschätzung

$$\frac{n}{\sum_{v=1}^n \frac{a_v}{s-a_v}} \leq n-1 \leq \frac{\sum_{v=1}^n \frac{s-a_v}{a_v}}{n},$$

die nur im Falle  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  Gleichheit ergibt.

I. PAASCHE, München

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und

Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Buelrainstrasse 51, Winterthur.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = 1, \\ a \quad & \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = k, \\ a^2 \quad & \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)} = k^2. \end{aligned}$$

2. Bilden die Zahlen  $x, y, z$  eine arithmetische Reihe, so ist das auch der Fall bei

$$x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + xz + z^2, \quad y^2 + yz + z^2.$$

3. Aus  $abc = 1$  folgt

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} &= 1, \\ \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{bc}{bc+b+1} + \frac{ca}{ca+c+1} &= 1. \end{aligned}$$

► Für die erste Identität: Erweitere den ersten Bruch mit  $c$  und kürze den zweiten durch  $b$ .

4. Die Gleichung

$$\frac{x}{y} \cdot z = \frac{x}{y} + z$$

soll in ganzen Zahlen gelöst werden.

►  $x = (k+1)p$ ,  $y = kp$ ,  $z = k+1$ .

5. Enthalten die Zahlen  $x$  und  $y$  den Faktor 3 nicht, so enthält  $x^6 - y^6$  stets den Faktor 9.

►  $x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$ , usw.