

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	14 (1959)
<b>Heft:</b>	4
 <b>Artikel:</b>	Schrägrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven
<b>Autor:</b>	Tschupik, Josef P.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-20321">https://doi.org/10.5169/seals-20321</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

etwa  $y_1 = p/q$  mit teilerfremden natürlichen Zahlen  $p$  und  $q$ . Nun können  $m, n \geq 0$  so gewählt werden, dass

$$|q x_1 + n p - m q| \leq \frac{1}{2}$$

wird, also, wie anfangs gezeigt,

$$q \delta \leq q |x_1 + n y_1 - m| = |q x_1 + n p - m q| \leq \frac{1}{2}.$$

Somit haben die rationalen Funktionswerte von  $f(x)$  beschränkte Nenner; sie werden ganzzahlig, wenn man sie mit einer geeigneten Zahl durchmultipliziert. Das war behauptet worden.

Nebenbei sieht man, dass *beschränkte* Funktionen, die den Voraussetzungen von Satz 3 genügen, notwendig periodisch sind.

Ein Beispiel für den in Satz 2 und Satz 3 betrachteten Lösungstyp ist die Funktion

$$f(x) = 2^{k+1}, \quad \begin{aligned} &\text{wenn } m-1 < x \leq m \text{ und } 2^k \text{ die grösste in } 3m+1 \neq 0 \\ &\text{steckende Potenz von 2 ist } (m \text{ ganz, } k = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Der genaue Wertevorrat besteht aus den Zahlen  $2, 4, 8, \dots, 2^{k+1}, \dots$ . Die Funktion ist durchweg linksseitig stetig und nur für ganzzahlige Werte von  $x$  unstetig.

Zum Abschluss sei noch auf ein bequemes Konstruktionsverfahren hingewiesen, das beliebig viele Lösungen von (1), nicht aber die allgemeine Lösung liefert. Man wähle irgendeine Untergruppe  $G$  in der additiven Gruppe  $R$  der reellen Zahlen und eine beliebige Abbildung  $g$  von  $R/G$  in  $G$ . Dann ist  $f(x) = g(x + G)$  eine Lösung von (1).

R. WAGNER, Karlsruhe

## Schrägrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven

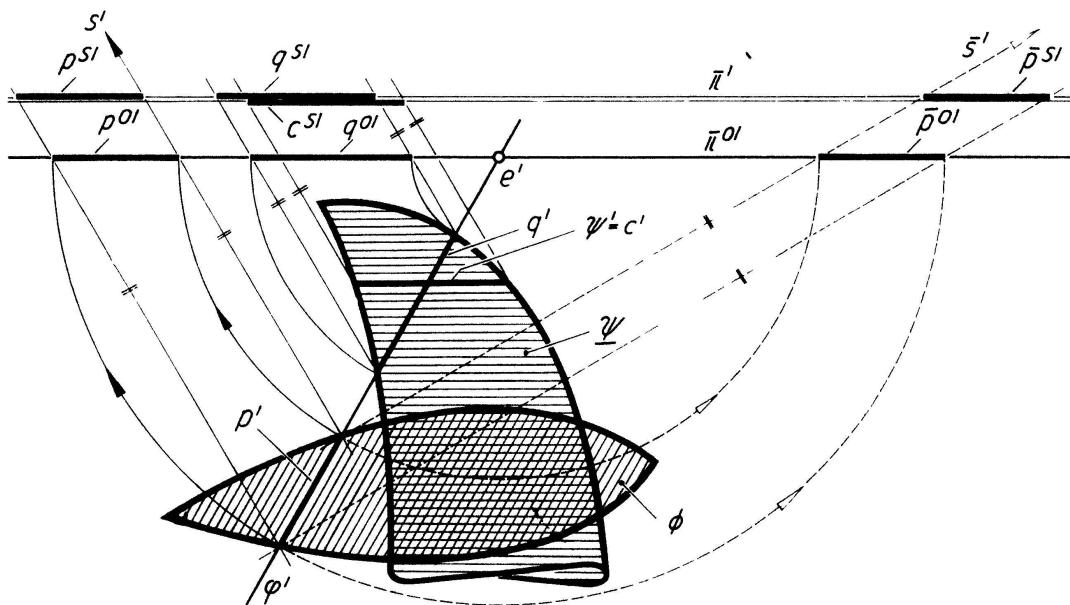
Zur Konstruktion der Durchdringungskurve  $k$  zweier Flächen  $\Phi, \Psi$  zieht man im allgemeinen eine Schar günstig gewählter Hilfsflächen  $\varphi$  (meist Ebenen oder Kugeln) heran. Wird  $\Phi$  von  $\varphi$  nach der Kurve  $p$  und  $\Psi$  von  $\varphi$  nach  $q$  geschnitten, so gehören die Schnittpunkte von  $p$  und  $q$  der Durchdringungskurve  $k$  an. So einfach diese Überlegung ist, so ermüdend gestaltet sich meist bei komplizierteren Flächen die praktische Durchführung wegen der rasch anwachsenden Zahl der Konstruktionslinien. – Unter der Voraussetzung, dass  $\Phi$  und  $\Psi$  je eine Schar einigermassen leicht zu zeichnender Parallelschnitte aufweisen, soll nun gezeigt werden, wie man durch Verwendung bereits gezeichneter Konstruktionslinien den Zuwachs an Konstruktionslinien weitgehend drosseln kann. Es wird hier ausdrücklich der Zuwachs betont, da man sich leicht davon überzeugen kann, dass die Ermittlung der ersten Punkte von  $k$  bei den meisten Verfahren sowohl quantitäts- als auch qualitätsmässig nahezu den selben Konstruktionsaufwand verlangt.

### Voraussetzung

Die Fläche  $\Phi$  möge von einer Schar paralleler Ebenen  $\varphi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) nach möglichst einfachen Kurven  $p_i$  geschnitten werden, analog die Fläche  $\Psi$  von einer Parallelebenenschar  $\psi_j$  nach Kurven  $c_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Die Ebenen  $\varphi_i$  sollen die Funktion der eingangs erwähnten Hilfsflächen übernehmen. – Da man durch Einführung zweier Seitenrisse stets erreichen kann, dass zwei beliebige Ebenen projizierend erscheinen, mögen  $\varphi_i$  und  $\psi_j$  künftig als erstprojizierend (das heisst  $\perp \Pi_1$ ) vorausgesetzt werden.

### Hilfsüberlegungen

$\varphi, \psi$  seien Vertreter der Scharen  $\varphi_i, \psi_j$ ;  $\Pi^0$  sei eine beliebige Ebene parallel zu  $\psi$ .  $\varphi$  kann man auf zwei Arten um ihre Spur  $e$  in  $\Pi^0$  nach  $\Pi^0$  drehen (Figur 1). Die in  $\varphi$



Figur 1

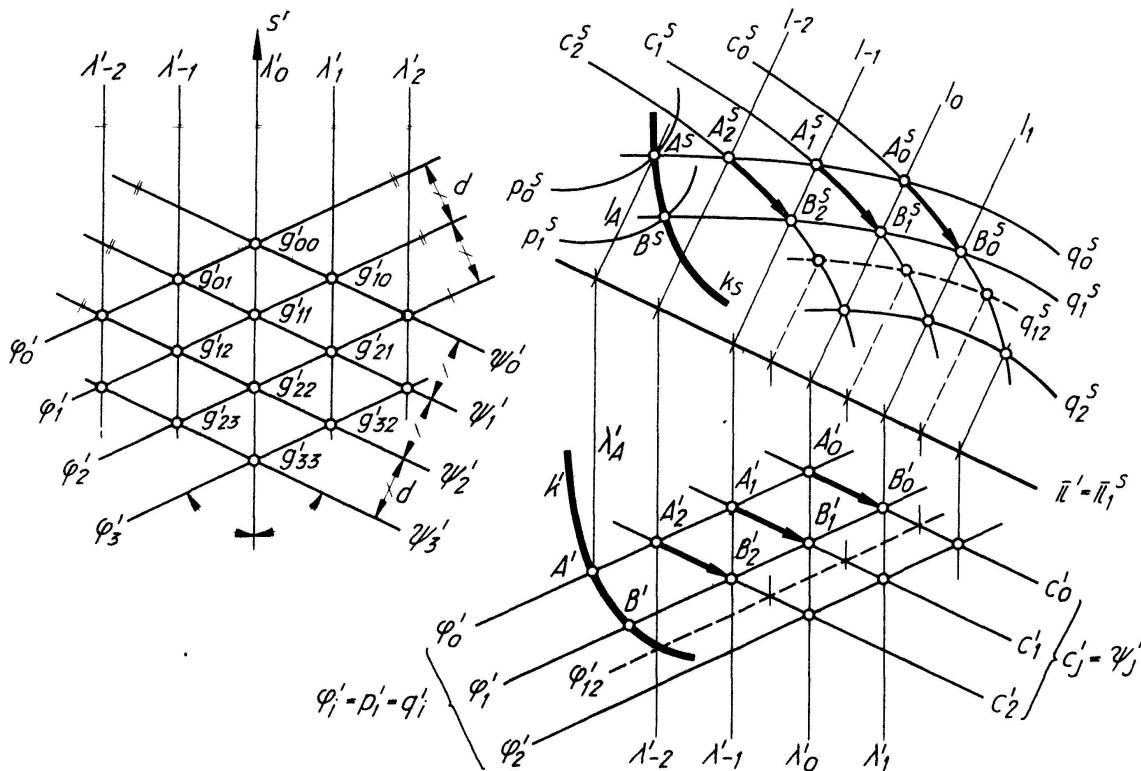
gelegenen Kurven  $p$  von  $\Phi$  und  $q$  von  $\Psi$  gehen dadurch in kongruente Kurven  $p^0, q^0$  (bzw.  $\bar{p}^0, \dots$ ) in  $\Pi^0$  über. Die Drehung von  $\varphi$  nach  $\Pi^0$  ist bekanntlich durch die Parallelprojektion in der Drehsehnenrichtung  $s$  (bzw.  $\bar{s}$ ) ersetzbar.  $s, \bar{s}$  sind zur Grundriss-ebene  $\Pi_1$  und zu je einer der Symmetrieebenen von  $\varphi$  und  $\Pi^0$  – also auch von  $\varphi$  und  $\psi$  – parallel. Da die Parallelprojektion auf parallele Ebenen  $\psi, \Pi^0, \Pi$  kongruente Bilder liefert, gilt: *Im Schrägriss für die Sehstrahlrichtung  $s$  (oder  $\bar{s}$ ) auf eine Ebene  $\Pi$  ( $\Pi \parallel \psi_j$ ) wird jede Kurve  $p_i$  von  $\Phi$ ,  $q_i$  von  $\Psi$  und  $c_j$  von  $\Psi$  auf eine kongruente Kurve  $p_i^s, q_i^s$  bzw.  $c_j^s$  abgebildet.* Wie man leicht einsieht, gilt dies auch für den Fall  $\Pi \parallel \varphi_i$ .

Es seien nun sowohl die  $\varphi_i$  als auch die  $\psi_j$  äquidistant im Abstand  $d$ , weiter mögen die Indizes  $i, j$  in Richtung  $s$  gleichlaufend zu- oder abnehmen (Figur 2). Die Schnittgeraden  $g_{ii}$  aller Ebenenpaare  $\varphi_i, \psi_i$  mit gleichen Indizes liegen dann in derselben Ebene  $\lambda_0$ .  $\lambda_0$  ist Symmetrieebene von  $\varphi_i$  und  $\psi_i$ , also parallel zu  $s$ , und ihr Schrägriss ist daher eine Gerade  $l_0$ . Mit anderen Worten, die Schnittgeraden  $g_{ii}$  je zweier Ebenen  $\varphi_i, \psi_i$  mit gleichen Indizes haben denselben Schrägriss  $l_0$ . Analog folgt, dass die Schnittgeraden aller Ebenenpaare  $\varphi_i, \psi_j$ , für die  $i - j = \tau = \text{const}$  ist, denselben Schrägriss  $l_\tau$  haben.

## Konstruktion der Durchdringungskurve $k$

In der vorhin besprochenen Anordnung der Parallelschnitte und des Schrägrisses mögen die Schrägbilder der Kurvenscharen  $c_j, p_i$  und der Ebenenschar  $\lambda_\tau$  bereits gezeichnet vorliegen. Wir zeigen, dass abgesehen von Interpolationen ohne weitere Hilfslinien der Schrägriss des Systems der Schnittkurven  $q_i$  der Ebenen  $\varphi_i$  mit  $\Psi$  gezeichnet werden kann.

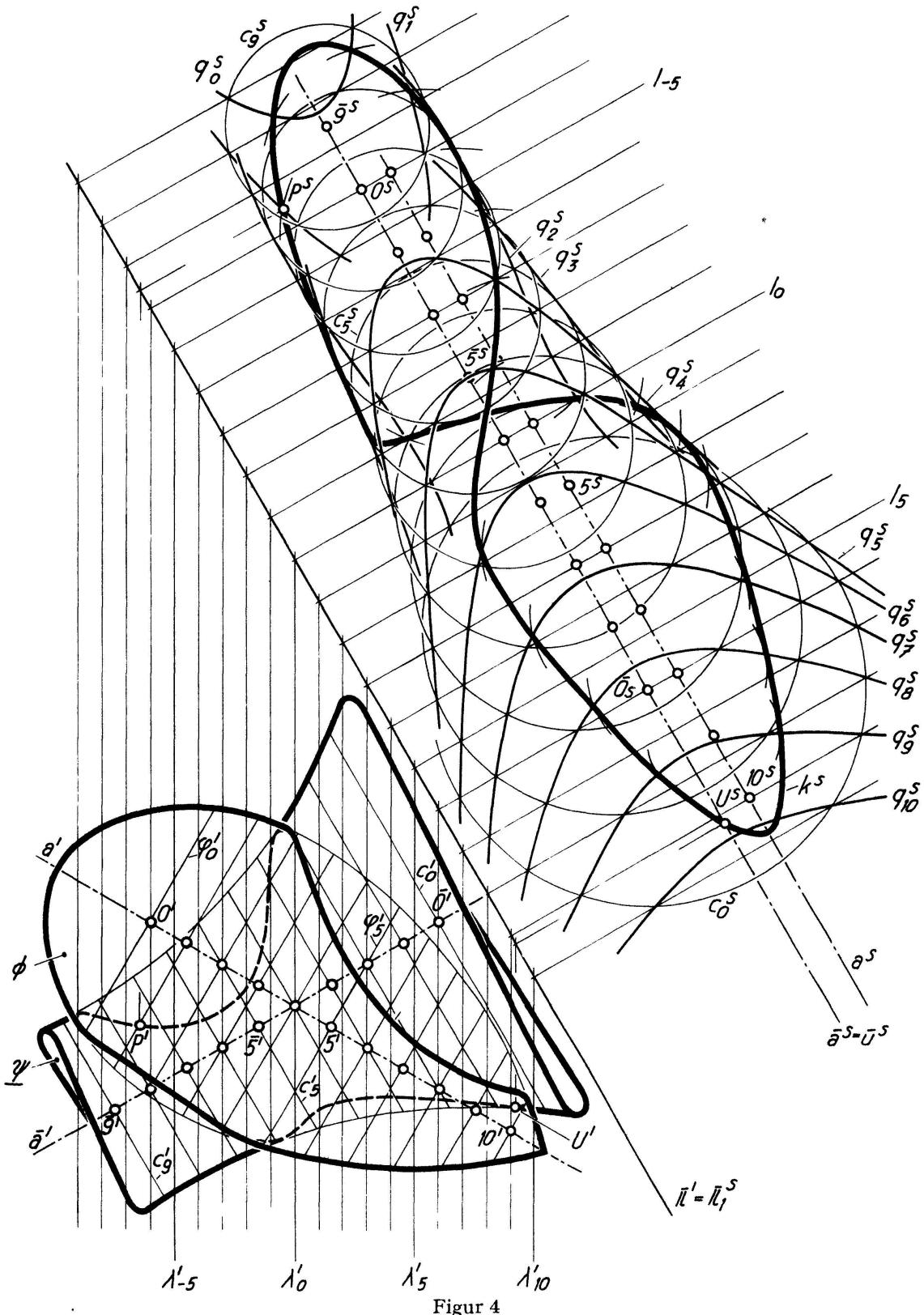
In Figur 3 schneidet die Ebene  $\varphi_0$  die Kurven  $c_0, c_1, c_2, \dots$  der Reihe nach in Punkten  $A_0, A_1, A_2, \dots$  von  $q_0$ , die bei der vorliegenden Annahme in den Ebenen  $\lambda_0, \lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \dots$  liegen müssen. Ihre Schrägrisse  $A_0^s, A_1^s, A_2^s, \dots$  findet man daher als



Figur 2

Figur 3

Schnittpunkte von  $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \dots$  mit  $l_0, l_1, l_2, \dots$ ; durch  $A_0^s, A_1^s, A_2^s, \dots$  ist  $q_0^s$  bestimmt, und der Schnittpunkt von  $q_0^s$  mit  $p_0^s$  ist bereits Bild eines Punktes  $A$  der Durchdringungskurve  $k$ . Durchläuft man jede der Kurven  $c_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) von  $A_j$  weg (in Pfeilrichtung) bis zum Schnitt mit  $\varphi_1$ , so erhält man Punkte  $B_j$  der Kurve  $q_1$  in  $\varphi_1$ . Wie aus dem Grundriss ersichtlich, ist der Index der durch  $B_j$  gehenden Ebenen  $\lambda_r$  um 1 grösser (bzw. kleiner bei entgegengesetzter Orientierung) als bei  $A_j$ , das heisst, man findet die Punkte  $B_j^s$  im Schrägriss, indem man die Kurven  $c_j^s$  von  $A_j^s$  weg bis zum Schnitt mit den Geraden  $l_r$  vom nächsthöheren (bzw. nächstniedrigeren) Index verfolgt. Durch die  $B_j^s$  geht  $q_1^s$ ; der Schnitt von  $q_1^s$  mit  $p_1^s$  gibt den Punkt  $B^s$  von  $k^s$  usf. – Das Aufsuchen des Grundrisspunktes  $A'$  erfordert nur mehr zwei Hilfslinien, nämlich  $l_A \parallel l_r$  durch  $A^s$  und  $\lambda'_A \parallel \lambda'_r$  durch den Schnittpunkt von  $l_A$  mit  $\Pi'$  bis zum Schnittpunkt mit  $\varphi'_0$ ; diese Linien wird man natürlich im allgemeinen nicht einzeichnen, sondern nur ihre Schnitte mit  $\Pi'$  bzw.  $\varphi'_0$  markieren. Figur 3 zeigt auch (gestrichelt), wie man Zwischenpunkte aufsucht, indem man zum Beispiel im Grund-



Figur 4

riss die Gerade  $\varphi'_{12}$  als Bild einer Ebene  $\varphi_{12}$  und im Schrägriss die zugehörigen Geraden  $l$  interpoliert. – Die Schrägrisse der wahren ersten Umrisse von  $\Phi$ ,  $\Psi$  findet man als geometrische Orte der Berührpunkte von Tangenten  $\parallel l$  (die hier als Schrägrisse von Grundrisssehstrahlen aufgefasst werden) an die Kurven der Scharen  $\varphi_i$  bzw.  $q_i$  und  $c_j$ .

Die Schnittpunkte von  $k$  mit dem wahren ersten Umriss lassen sich im Schrägriss ablesen und ermöglichen eine rasche Konstruktion der Umrisspunkte von  $k'$ .

Bei der praktischen Durchführung empfiehlt es sich, jenen Sehstrahl  $s$  auszuwählen, der in der Symmetrieebene des spitzen Winkels von  $\varphi$  und  $\psi$  liegt, weil dann die Schrägbilder von Kurven derselben Schar deutlicher getrennt erscheinen. Man wird auch nicht die Kurven  $p_i^s$  voll durchzeichnen, sondern nur jene Kurventeile, die für den Schnitt mit  $q_i^s$  gebraucht werden. Die Übersichtlichkeit des Schrägrisses gestattet hier meist eine rasche Abschätzung.

Figur 4 zeigt als Anwendung die Ermittlung der Durchdringungskurve  $k$  zweier Drehflächen  $\Phi, \Psi$  mit windschiefen Achsen  $a, \bar{a}$ . Wir bezeichnen mit  $0, 1, 2, \dots$  die Mittelpunkte der Parallelkreise  $p_i$  von  $\Phi$  und mit  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$  die Mittelpunkte der Parallelkreise  $c_j$  von  $\Psi$ . Die Kreise  $c_j^s$ , die für die Ermittlung der  $q_i^s$  verwendet werden, sind im allgemeinen vollständig eingezeichnet, die Kreise  $p_i^s$  jedoch nur in den Schnittzonen. Figur 4 enthält *alle* Konstruktionslinien für die Ermittlung von  $k^s$ , zeigt aber das Aufsuchen der Grundrisspunkte nur für einen allgemeinen Punkt  $P$  und einen Umrisspunkt  $U$  von  $k$ .  $U^s$  ist einer der Schnittpunkte von  $k^s$  mit dem Schrägriss  $\bar{u}^s = \bar{a}^s$  des wahren ersten Umrisses von  $\Psi$ . – Da man leicht die erste Spur  $e$  der von den Flächennormalen bezüglich  $\Phi, \Psi$  in  $P$  aufgespannten Ebene findet, liesse sich auch die Tangente  $t'$  an  $k'$  in  $P'$  zeichnen; bekanntlich ist ja  $t' \perp e'$ .

### Anwendungsbereich des Verfahrens

Wie eingangs erwähnt, eignet sich das Verfahren besonders für Flächen, die je ein System von einfach zu zeichnenden Parallel schnitten aufweisen, also Flächen, die ein System von ähnlichen oder kongruenten Kurven oder speziell von Kreisen und Geraden in parallelen Ebenen besitzen. Das heisst, es ist mit Vorteil anwendbar auf alle Drehflächen und Schraubflächen, auf Schiebflächen mit einer ebenen Schiebcurvenschar, auf Regelflächen mit einer Richtebene, auf Kegel, Gesimsflächen usw. Bei dreiachsig Flächen zweiter Ordnung wird es zweckmäßig sein, die Kreisschnitte statt der Schnitte der Hauptebenenstellungen zu benutzen.

Die Tatsache, dass bei Parallelprojektion die Kurven  $c$  auf affine Kurven  $c^s$  abgebildet werden, kann man auch benutzen, um durch geeignete Wahl des Sehstrahls eine Vereinfachung der  $c^s$  zu erreichen, also zum Beispiel Ellipsen auf Kreise abzubilden. Aus der Bedingung  $\lambda_i \parallel s$  folgt dann allerdings, dass im allgemeinen der Abstand der Parallel schnittebenen nicht mehr für beide Scharen gleich angenommen werden kann.

JOSEF P. TSCHUPIK, Graz

### Ungelöste Probleme

**Nr. 31.** On peut démontrer que de tous trois entiers consécutifs  $> 7$  au moins un a deux diviseurs premiers distincts. Le problème s'il existe une infinité des paires de nombres naturels consécutifs dont chacun a un seul diviseur premier se réduit à la recherche des nombres premiers de MERSENNE et de FERMAT [voir W. SIERPIŃSKI, Colloquium Mathematicum 6, 109 (1958)]. Le problème se pose quel est, pour un