Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 4

Artikel: Eindeutige Lösungen der Funktionalgleichung $f[x + f(x)] = f(x)$
Autor: Wagner, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20320

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1959

Eindeutige Lösungen der Funktionalgleichung

$$f[x + f(x)] = f(x)$$

I.

In den Elementen der Mathematik *8*, 20 (1953) wurde als Aufgabe Nr. 173 das Problem gestellt, alle Lösungen der auf EULER zurückgehenden Funktionalgleichung

$$f[x + f(x)] = f(x) \tag{1}$$

zu bestimmen. Die folgenden Bemerkungen sollen den von LÜSSY in derselben Zeitschrift[1]) angegebenen Lösungsweg ergänzen. Eine solche Ergänzung scheint mir hauptsächlich deswegen angebracht zu sein, weil man nicht sehen kann, wie unter den von LÜSSY konstruierten – im allgemeinen mehrdeutigen – Lösungen die eindeutigen herauszufinden sind. Gerade die Frage nach den eindeutigen Lösungen von (1) soll hier behandelt werden.

II.

Wir sprechen, ohne das weiterhin immer wieder zu erwähnen, stets von eindeutigen und für alle reellen Werte von x definierten Lösungen von (1). Die *Konstanzmengen* einer Funktion $f(x)$ werden nach BOURBAKI mit $f^{-1}(y)$ bezeichnet; es ist also

$$x \in f^{-1}(y) \text{ gleichwertig mit } f(x) = y.$$

Ausserdem verabreden wir die Schreibweise $M + \alpha$ für die Menge aller x mit $x - \alpha \in M$, wenn M irgendeine Menge reeller Zahlen und α reell ist.

Eine Funktion $f(x)$ befriedigt (1) dann und nur dann, wenn alle ihre Konstanzmengen $f^{-1}(y)$ mit $y \neq 0$ die Eigenschaft

$$f^{-1}(y) + y \subset f^{-1}(y) \tag{2}$$

haben.

[1]) W. LÜSSY, El. Math. *9*, 40 (1954). Lösung zu Aufgabe Nr. 173. Dort findet sich auch ein Hinweis darauf, wie EULER das Problem gefunden und behandelt hat.

Grundlegend für das weitere Vorgehen ist der folgende Satz, in dem dargelegt wird, wie man aus einer gegebenen Lösung $f(x)$ von (1) eine weitere Lösung $g(x)$ mit umfassenderem Wertevorrat gewinnen kann.

Satz 1: *$f(x)$ sei eine Lösung von* (1), *die den Wert y_0 nicht annimmt, und H^0 irgendeine Teilmenge von*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [f^{-1}(0) - n\, y_0];$$

aus H^0 bilde man die Menge

$$H = \bigcup_{n=0}^{\infty} [H^0 + n\, y_0].$$

a) *Die Funktion*

$$g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } x \in H, \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine Lösung von (1).

b) *Ist $h(x)$ eine weitere Lösung von* (1), *die sich von $f(x)$ höchstens auf der Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ unterscheidet, dann befriedigt $H^0 = h^{-1}(y_0)$ die oben für H^0 gestellte Forderung, und es ist $H = H^0$.*

Beweis: a) Es gilt $H \subset f^{-1}(0)$. Daraus folgt

$$g^{-1}(y_0) = H \quad \text{und} \quad g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \quad \text{für } y \neq 0, y_0.$$

Da definitionsgemäss $H + y_0 \subset H$ ist, haben alle Konstanzmengen von $g(x)$ die Eigenschaft (2); also ist $g(x)$ Lösung von (1). Die Behauptung b) ergibt sich aus

$$h^{-1}(y_0) + n\, y_0 \subset h^{-1}(y_0) \subset f^{-1}(0) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wir geben eine Funktion $u(x, y)$ von zwei reellen Variablen und eine die Null enthaltende Menge M von reellen Zahlen vor und nennen $u(x, y)$ eine *erzeugende Funktion auf M*, wenn folgende Forderungen erfüllt sind:

(A) $u(x, y)$ ist für alle $y \in M$ und alle x eindeutig erklärt und nimmt nur Werte aus M an;

(B) für jedes feste $y_0 \in M$ ist $u(x, y_0)$ eine Lösung von (1);

(C) hält man x_0 fest und lässt y in M variieren, so nimmt $u(x_0, y)$ höchstens einen von Null verschiedenen Wert an.

Für erzeugende Funktionen erklären wir einen Operator

$$\underset{y \in M}{\Phi}\, u(x_0, y) = \begin{cases} u(x_0, y_0), & \text{falls } u(x_0, y_0) \neq 0 \text{ für ein } y_0 \in M; \\ 0 & \text{, falls } u(x_0, y) = 0 \text{ für alle } y \in M. \end{cases}$$

Wegen (C) ist trotz der eventuellen Willkür bei der Auswahl von y_0 die Funktion

$$f(x) = \underset{y \in M}{\Phi}\, u(x, y)$$

für alle x eindeutig erklärt, *und zwar ist $f(x)$ eine Lösung von* (1), *die nur Werte aus M annimmt.* Das letztere ist klar, weil $u(x, y)$ nur in M variiert. Bei der Nachprüfung

der Funktionalgleichung darf man $f(x_0) \neq 0$ annehmen. Dann ist

$$f(x_0) = u(x_0, y_0) \text{ für passendes } y_0 \in M$$

und, weil $u(x, y_0)$ Lösung von (1) ist,

$$u\,[x_0 + f(x_0), y_0] = f(x_0) \neq 0,$$

also

$$f[x_0 + f(x_0)] = f(x_0),$$

wie behauptet.

III.

Mit Hilfe eines transfiniten Fortsetzungsprozesses können wir uns erzeugende Funktionen auf einer gegebenen Menge M aufbauen. Dabei wird eine Wohlordnung «$\prec$» von M verwendet, bei der $0 \preceq y$ für alle $y \in M$ sein möge.

Wir setzen zunächst

$$u(x, 0) \equiv 0.$$

Nun wählen wir irgendein $y_0 \neq 0$ aus M und setzen voraus, $u(x, y)$ sei auf dem durch $y \prec y_0$ beschriebenen Abschnitt von M erzeugende Funktion. Dann ist

$$f(x, y_0) = \underset{y \prec y_0}{\Phi}\, u(x, y) \prec y_0$$

eine Lösung von (1), auf die der Satz 1a angewendet werden kann. Man hat mit gebotener Rücksicht eine Menge $H^0 = H^0(y_0)$ zu wählen und daraus die Menge $H = H(y_0)$ zu bilden; dann erhält man eine Lösung $g(x)$ von (1) mit $g(x) \preceq y_0$, die wir zur Fortsetzung der schon vorliegenden Funktion $u(x, y)$ verwenden:

$$u(x, y) = \begin{cases} g(x) & \text{für } y = y_0 \\ u(x, y) & \text{für } y \prec y_0 \end{cases} = \begin{cases} y_0 & \text{für } y = y_0, \ x \in H(y_0), \\ f(x, y_0) & \text{für } y = y_0, \ x \notin H(y_0), \\ u(x, y) & \text{für } y \prec y_0 \end{cases} \tag{3}$$

ist erzeugende Funktion auf dem erweiterten Abschnitt $y \preceq y_0$ von M. Problematisch ist hierbei höchstens die Frage, ob an einer Stelle x_0 der neue Funktionswert $u(x_0, y_0)$ die Eigenschaft (C) stören kann. Sei also etwa $u(x_0, y_1) \neq 0$ $(y_1 \prec y_0)$; dann ist per definitionem $f(x_0, y_0) = u(x_0, y_1) \neq 0$, so dass x_0 nicht in $f^{-1}(0)$, also erst recht nicht in $H(y_0)$ liegt (vgl. Beweis von Satz 1a). Das ergibt wunschgemäss

$$u(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) = u(x_0, y_1)\ ^{2)}.$$

Nach Vorgabe des Mengensystems $H^0(y)$ $(y \in M)$ ist also tatsächlich eine erzeugende Funktion $u(x, y)$ auf der ganzen Menge M durch transfinite Induktion erklärt. *Die*

---

[2]) Die letzte Schlussweise zeigt, dass $u(x, y)$ sogar einer Verschärfung von (C) genügt: Wenn $u(x_0, y_1) \neq 0$ und $y_1 \preceq y_0$ ist, so wird $u(x_0, y_0) = u(x_0, y_1)$. Es folgt zum Beispiel, dass die Funktion $f(x, y_0)$ mit $u(x, y_1)$ identisch ist, falls y_0 in der Wohlordnung den Vorgänger y_1 hat.

aus $u(x, y)$ hervorgehende Funktion

$$h(x) = \underset{y \in M}{\Phi}\, u(x, y)$$

ist die allgemeine Lösung von (1), *die nur Werte aus M annimmt!*

Zur Begründung dieser Behauptung geben wir irgendeine in M variierende Lösung $h(x)$ von (1) vor und versuchen, den Aufbau von $u(x, y)$ so zu lenken, dass schliesslich die Bildung von $\underset{y \in M}{\Phi}\, u(x, y)$ gerade die vorgelegte Funktion $h(x)$ liefert. Genauer gesagt: die bei dem Fortsetzungsverfahren verfügbaren Mengen $H^0(y)$ können so eingerichtet werden, dass

$$u(x, y) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } y \succeqq h(x), \\ 0 \quad , & \text{falls } y \prec h(x) \end{cases}$$

herauskommt. Für $y = 0$ steht beiderseits identisch Null. Hat $u(x, y)$ die genannte Eigenschaft für alle $y \prec y_0$, so findet sich

$$f(x, y_0) = \underset{y \prec y_0}{\Phi}\, u(x, y) = \begin{cases} h(x), & \text{falls } h(x) \prec y_0, \\ 0 \quad , & \text{falls } h(x) \succeqq y_0. \end{cases}$$

Nach Satz 1b kann man $H^0(y_0) = h^{-1}(y_0)$ wählen; denn $f(x, y_0)$ unterscheidet sich von $h(x)$ höchstens dann, wenn es verschwindet. Man erhält $H(y_0) = h^{-1}(y_0)$ und [vergleiche (3)]

$$u(x, y_0) = \begin{cases} y_0 \quad , & \text{falls } h(x) = y_0 \\ h(x), & \text{falls } h(x) \prec y_0 \\ 0 \quad , & \text{falls } h(x) \succ y_0 \end{cases} = \begin{cases} h(x), & \text{falls } h(x) \preceqq y_0, \\ 0 \quad , & \text{falls } h(x) \succ y_0. \end{cases}$$

$u(x, y)$ hat also die angegebene Gestalt auch für alle $y \preceqq y_0$ und damit allgemein in M (transfinite Induktion!). Das führt nun unmittelbar auf

$$h(x) = \underset{y \in M}{\Phi}\, u(x, y).$$

Damit ist gezeigt, dass unser Verfahren bei geeigneter Lenkung jede Lösung von (1) zu liefern vermag, deren Wertevorrat in M liegt. Da M eine ganz beliebige Menge reeller Zahlen sein darf, besitzen wir jetzt sämtliche eindeutige Lösungen von (1).

IV.

In dieser Allgemeinheit erfordert unser Vorgehen die Heranziehung des Wohlordnungssatzes; dadurch verliert es hoffnungslos jeden konstruktiven Charakter. Der Wohlordnungssatz ist entbehrlich, wenn man sich auf Lösungen von (1) mit abzählbarem Wertevorrat beschränkt. Es wäre in diesem Zusammenhang interessant zu wissen, ob sich ohne Wohlordnungssatz überhaupt eindeutige Lösungen von (1) angeben lassen, die einen nichtabzählbaren Wertevorrat besitzen.

Im Falle einer *abzählbaren Menge* $M = \{0 = y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ ist durch die natürliche Anordnung der Indizes eine Wohlordnung erklärt. Mit Hilfe von Satz 1a kann

man jetzt durch gewöhnliche Induktion nach k erzeugende Funktionen $u(x, y)$ auf M konstruieren; der Operator Φ ist dabei entbehrlich, was aus der Fussnote [2]) hervorgeht. Die allgemeine Lösung von (1) mit Werten aus M ist durch

$$h(x) = \underset{y \in M}{\Phi}\, u(x, y) = \lim_{k \to \infty} u(x, y_k)$$

darstellbar.

Die Abzählbarkeitseigenschaft folgt schon aus recht schwachen und handlichen Zusatzforderungen an die Lösungen. Abzählbaren Wertevorrat haben zum Beispiel alle Lösungen von (1), die durchweg nichtnegativ und in einem offenen Intervall stetig sind, ohne dort identisch zu verschwinden; das wird durch die beiden folgenden Sätze belegt. Bei den Beweisen verwenden wir die Tatsache, dass mit $f(x)$ jeweils auch $f(\alpha x + \gamma)/\alpha$ Lösung von (1) ist.

Satz 2: *Eine eindeutige Lösung von* (1) *ist in jedem offenen Stetigkeitsintervall konstant.*

Beweis: Ist $f(x)$ Lösung von (1) und im offenen Intervall stetig, aber nicht konstant, so enthält der Wertevorrat ein offenes Intervall. Man darf also annehmen, für ein passendes x_0 sei

$$1 = f(0) < f(x_0)$$

und $f(x)$ zwischen 0 und x_0 einschliesslich der Grenzen stetig. Durch Auswahl hinreichend grosser natürlicher Zahlen m und n mit $n > m > x_0$ erreicht man

$$\frac{n - x_0}{n - m} < f(x_0); \qquad \frac{n - 0}{n - m} > f(0) = 1.$$

Daher existiert ein ξ zwischen 0 und x_0 mit

$$n - \xi = (n - m)\, f(\xi), \quad \text{das heisst} \quad \xi + (n - m)\, f(\xi) = n.$$

Wendet man die Funktionalgleichung $(n - m)$-mal auf $f(\xi)$ und n-mal auf $f(0)$ an, so erhält man $f(\xi) = 1$ und daraus $\xi = m$; das aber widerspricht der Zwischenwerteigenschaft von ξ.

Satz 3: *Hat eine Lösung von* (1) *in einem offenen Intervall einen konstanten positiven Wert und wird sie nirgends negativ, so sind die Funktionswerte durchweg ganzzahlige Vielfache einer gewissen positiven reellen Zahl.*

Beweis: Wir beschränken uns erlaubterweise auf eine Lösung $f(x) \geqq 0$ von (1) mit $f(x) \equiv 1$ für $|x| < \delta$; ferner sei $f(x_1) = y_1 \neq 1$. Dann ist für je zwei ganze Zahlen $m, n \geqq 0$

$$|x_1 + n\, y_1 - m| \geqq \delta.$$

Andernfalls läge $x_1 + n\, y_1 - m$ in $f^{-1}(1)$, also $x_1 + n\, y_1$ zugleich in $f^{-1}(1)$ und $f^{-1}(y_1)$, was nicht geht.

Da man, falls y_1 irrational und positiv ist, die Grösse $|x_1 + n\, y_1 - m|$ durch Wahl passender ganzer Zahlen $m, n \geqq 0$ beliebig klein machen kann[3]), muss y_1 rational sein,

[3]) Beweis mit Kettenbruchapproximation von y_1 oder mit Gitterpunktvorstellungen.

etwa $y_1 = p/q$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen p und q. Nun können $m, n \geqq 0$ so gewählt werden, dass

$$|q\,x_1 + n\,p - m\,q| \leqq \frac{1}{2}$$

wird, also, wie anfangs gezeigt,

$$q\,\delta \leqq q\,|x_1 + n\,y_1 - m| = |q\,x_1 + n\,p - m\,q| \leqq \frac{1}{2}.$$

Somit haben die rationalen Funktionswerte von $f(x)$ beschränkte Nenner; sie werden ganzzahlig, wenn man sie mit einer geeigneten Zahl durchmultipliziert. Das war behauptet worden.

Nebenbei sieht man, dass *beschränkte* Funktionen, die den Voraussetzungen von Satz 3 genügen, notwendig periodisch sind.

Ein Beispiel für den in Satz 2 und Satz 3 betrachteten Lösungstyp ist die Funktion

$$f(x) = 2^{k+1}, \quad \begin{array}{l} \textit{wenn } m-1 < x \leqq m \textit{ und } 2^k \textit{ die grösste in } 3\,m+1 \neq 0 \\ \textit{steckende Potenz von } 2 \textit{ ist } (m \textit{ ganz}, k = 0, 1, \ldots). \end{array}$$

Der genaue Wertevorrat besteht aus den Zahlen $2, 4, 8, \ldots, 2^{k+1}, \ldots$. Die Funktion ist durchweg linksseitig stetig und nur für ganzzahlige Werte von x unstetig.

Zum Abschluss sei noch auf ein bequemes Konstruktionsverfahren hingewiesen, das beliebig viele Lösungen von (1), nicht aber die allgemeine Lösung liefert. Man wähle irgendeine Untergruppe G in der additiven Gruppe R der reellen Zahlen und eine beliebige Abbildung g von R/G in G. Dann ist $f(x) = g(x + G)$ eine Lösung von (1).

R. WAGNER, Karlsruhe

Schrägrisse als Hilfsmittel zur Konstruktion von Durchdringungskurven

Zur Konstruktion der Durchdringungskurve k zweier Flächen Φ, Ψ zieht man im allgemeinen eine Schar günstig gewählter Hilfsflächen φ (meist Ebenen oder Kugeln) heran. Wird Φ von φ nach der Kurve p und Ψ von φ nach q geschnitten, so gehören die Schnittpunkte von p und q der Durchdringungskurve k an. So einfach diese Überlegung ist, so ermüdend gestaltet sich meist bei komplizierteren Flächen die praktische Durchführung wegen der rasch anwachsenden Zahl der Konstruktionslinien. – Unter der Voraussetzung, dass Φ und Ψ je eine Schar einigermassen leicht zu zeichnender Parallelschnitte aufweisen, soll nun gezeigt werden, wie man durch Verwendung bereits gezeichneter Konstruktionslinien den Zuwachs an Konstruktionslinien weitgehend drosseln kann. Es wird hier ausdrücklich der Zuwachs betont, da man sich leicht davon überzeugen kann, dass die Ermittlung der ersten Punkte von k bei den meisten Verfahren sowohl quantitäts- als auch qualitätsmässig nahezu den selben Konstruktionsaufwand verlangt.