Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

[12] Kakutani, S., *A Proof that There Exists a Circumscribing Cube Around any Closed Bounded Convex Set in* R^3, Ann. Math., Princeton *43*, 739–741 (1942).
[13] Livesay, G. R., *On a Theorem of F. J. Dyson*, Ann. Math., Princeton, 227–229 (1954).
[14] Mira Fernandes, A. de, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, Portugaliae Math. *5*, 132–134 (1946).
[15] Poincaré, H., *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3e partie), J. Math. pures appl. [4] *1*, 167–244 (1885).
[16] Sperner, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *6*, 265–272 (1928).
[17] Yamabe, H., and Z. Yujobo, *On the Continuous Function Defined on a Sphere*, Osaka math. J. *2*, 19–22 (1950).

Ungelöste Probleme

Nr. 29. Existe-t-il une infinité de nombres premiers p de la forme $8k+1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant impair? (Tels sont par exemple les nombres 17, 41, 97.)

On peut démontrer que pour p premiers de la forme $8k+3$ ou $8k+5$ le nombre 2 appartient à un exposant pair et que pour p premiers de la forme $8k+7$ le nombre 2 appartient à un exposant impair. MM. Browkin et Makowski ont remarqué qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $8k+1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant pair: tels sont, par exemple, tous les facteurs premiers des nombres de Fermat $2^{2^n}+1$, où $n = 2, 3, \ldots$.

Il est encore à remarquer que M. A. Schinzel a déduit de son hypothèse H sur les nombres premiers [énoncée dans Acta Arithmetica *4*, 188 (1958)] que la réponse à notre probleme est positive. W. Sierpiński

Nr. 30. M. S. Rolewicz a demandé si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma\,\sigma(n)}{n} = +\infty,$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs naturels du nombre n. La réponse à cette question est négative. En effet, A. Rényi a démontré (dans le journal Izwiestia A. N. SSSR. *1948*, 57–78) qu'il existe une infinité de nombres premiers n tels que $n+2$ a au plus k diviseurs premiers (où k est une constante absolue). Pareillement on peut démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers n tels que $n+1$ a au plus k diviseurs premiers. Pour un tel n, $\sigma(n)$ a au plus k diviseurs premiers et le nombre $\sigma\,\sigma(n)/\sigma(n)$ est borné, d'où

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{\sigma\,\sigma(n)}{n} < +\infty.$$

Le problème se pose si l'on a

$$\underline{\lim}_{n=\infty} \frac{\sigma\,\sigma\,\sigma(n)}{n} < +\infty$$

et, généralement

$$\varlimsup_{n=\infty} \frac{\overbrace{\sigma\,\sigma\ldots\sigma}^{k \text{ fois}}(n)}{n} < +\infty .$$

Je ne connais pas la réponse à ce problème, mais je pense qu'elle est positive.

A. SCHINZEL

Kleine Mitteilungen

Extremaleigenschaften der Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex

Die Ecktransversalen durch einen beliebigen inneren Punkt P des n-dimensionalen Simplex A_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ schneiden die entsprechenden gegenüberliegenden Grenzräume in B_i $(i = 1, \ldots, n+1)$. Bezeichnen wir mit R_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ die Strecke $\overline{PA}_i$, mit d_i die Strecke $\overline{PB}_i$, so gilt bekanntlich[1]) die Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geqq \frac{n\,(x_1 \cdots x_{i-1}\, x_{i+1} \cdots x_{n+1})^{1/n}}{x_i},$$

wenn man die entsprechenden baryzentrischen Koordinaten von P bezüglich der Simplexeckpunkte mit x_i $(i = 1, \ldots, n+1)$ bezeichnet. Nach einfacher Umformung folgt aus obiger Ungleichung

$$\frac{R_i}{d_i} \geqq \frac{n \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{1/n}}{x_i^{(n+1)/n}} . \tag{1}$$

Sei nun

$$S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{1_i} \cdots d_{i_k}} \qquad (i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n+1), \tag{2}$$

dann gilt die folgende Ungleichung:

$$S_k \geqq \binom{n+1}{k} n^k . \tag{3}$$

Beweis: Wendet man die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf (2) an, so folgt, dass

$$S_k \geqq \binom{n+1}{k} \left(\prod_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{1_i} \cdots d_{i_k}} \right)^{1/\binom{n+1}{k}}, \qquad (i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n+1), \tag{4}$$

da die Gliederanzahl von S_k sich als die Anzahl der Kombinationen k-ter Ordnung aus $n+1$ Elementen ergibt.

Aus (1) folgt, dass

$$\frac{R_{i_1} \cdots R_{i_k}}{d_{i_1} \cdots d_{i_k}} \geqq \frac{n^k \left(\prod_{i=1}^{n+1} x_i \right)^{k/n}}{\left(\prod_{i=i_1}^{i_k} x_i \right)^{(n+1)/n}} . \tag{5}$$

---

[1]) J. SCHOPP, *Über eine Extremaleigenschaft des Simplex im n-dimensionalen Raum*, El. Math. *13*, 106–107 (1958).