

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	14 (1959)
Heft:	3
Artikel:	Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis und Kugelfläche
Autor:	Hadwiger, H.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-20319

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIV Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1959

Elementare Begründung ausgewählter stetigkeitsgeometrischer Sätze für Kreis und Kugelfläche

Zahlreiche stetigkeitsgeometrische Sätze, insbesondere solche über stetige Funktionen auf euklidischen Sphären, gehören zwar der Topologie an und sind zum grossen Teil auch nur mit Verwendung der ihnen adäquaten Hilfsmittel, insbesondere algebraisch-topologischer Methoden begründbar, gestatten jedoch viele reizvolle Anwendungen, die sich ganz im Rahmen der Elementargeometrie halten¹⁾. Es ist deshalb besonders wünschbar, für diese Schlüsselaussagen wenigstens in den niedrigsten Fällen, das heisst für Kreis und Kugelfläche, möglichst einfache Beweise zur Verfügung zu haben. Dass bei der angedeuteten Beschränkung Herleitungen der entsprechenden Sätze möglich sind, die durchaus elementar genannt werden dürfen, ist bekannt. Die Überwindung der eigentlichen topologischen Schwierigkeiten vollzieht sich fast unmerkbar bei einfachen Stetigkeitsbetrachtungen mit Drehwinkeln in der Ebene, eine Möglichkeit, die in höheren Dimensionen leider kein ähnlich elementares Analogon aufweist.

Nachfolgend will ich einige Sätze der oben erwähnten Art kurz zusammenfassen und unter der genannten Beschränkung auf möglichst einfache Weise herleiten.

Damit soll den Lesern ein kleiner Ergebnisbericht zu dem hier einschlägigen Teil der elementaren Stetigkeitsgeometrie zur Verfügung gestellt werden. Auch der Kenner dürfte hier das eine oder andere finden, das ihm neu ist; insbesondere sind einige bekannte Sätze im Zuge der elementaren Bearbeitung gleichzeitig verschärft worden.

1. Stetige Funktionen im Kreisbereich

In der euklidischen Ebene E liege der abgeschlossene Kreisbereich K ; der Rand von K ist die Kreislinie L . Eine in E stetige Funktion $\varphi(p)$, die für alle Punkte $p \in K$ definiert ist, nennen wir kurz eine stetige Funktion in K . Ein positiver Umlaufsinn orientiere die Kreislinie L und lege auch den positiven Drehsinn für Winkelmessung in der Ebene E fest. Für zwei Punkte $p, q \in L$ erklären wir eindeutig die Distanz

¹⁾ Einige Andeutungen findet man in [7]. Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 59.

$\varrho(p, q)$ als den Winkel ϱ ($0 \leq \varrho < 2\pi$), um den man den Punkt q im positiven Sinn auf L um den Mittelpunkt von K drehen muss, damit er mit p zusammenfällt.

Beim Studium stetiger Funktionen in K stützt man sich oft auf eine einfache Tatsache, die das Verhalten von φ auf L betrifft:

Satz 1.1: Ist $\varphi(p)$ eine stetige Funktion im Kreisbereich K , so gibt es zu jedem vorgeschriebenen Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) ein Punktpaar $p, q \in L$ der Distanz $\varrho(p, q) = \varrho$ auf dem Kreisrand L derart, dass $\varphi(p) = \varphi(q)$ ausfällt.

Beweis 1.1: Man wähle $p', p'' \in L$ so, dass

$$\varphi(p') = \text{Max } \varphi(p), \quad \varphi(p'') = \text{Min } \varphi(p) \quad [p \in L]$$

ist. Gilt

$$\varrho(p', q') = \varrho(p'', q'') = \varrho,$$

so wird

$$\varphi(p') - \varphi(q') \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(p'') - \varphi(q'') \leq 0.$$

Dreht man ein Punktpaar $p, q \in L$ mit $\varrho(p, q) = \varrho$ in L stetig derart, dass dieses zunächst mit p', q' und dann mit p'', q'' zusammenfällt, so muss für eine Zwischenlage $\varphi(p) - \varphi(q) = 0$ sein.

Die nachfolgenden beiden Sätze gestatten, vom Verhalten stetiger Funktionen auf dem Kreisrand L auf das Verhalten im Kreisbereich K zu schliessen. Sie sind ihrem Wesen nach mit den Nullstellensätzen vom Bolzanoschen Typ verwandt, die einerseits an den klassischen Zeichenwechselsatz anschliessen, andererseits mit den höherdimensionalen Verallgemeinerungen in das Gebiet der Topologie hineinführen, wie dies HOPF [11] ausführlich dargetan hat.

Satz 1.2: Sind $\varphi(p)$ und $\psi(p)$ zwei stetige Funktionen im Kreisbereich K und gibt es einen festen Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) so, dass für jedes Punktpaar $p, q \in L$ des Kreisrandes L , das der Distanzbedingung $\varrho(p, q) = \varrho$ genügt, die Beziehungen

$$\varphi(q) = -\varphi(p); \quad \psi(q) = -\psi(p)$$

gelten, so gibt es einen Punkt $p \in K$ derart, dass

$$\varphi(p) = \psi(p) = 0$$

ausfällt.

Beweis 1.2: Wir gehen von der Gegenannahme aus, wonach für $p \in K$ stets $[\varphi(p)]^2 + [\psi(p)]^2 > 0$ gelten muss. Lassen wir im Punkt p den Vektor

$$t = t(p) = \varphi(p) \mathbf{x} + \psi(p) \mathbf{y}$$

angreifen, wo \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei orthonormierte Vektoren der Kreisebene E bezeichnen, so entsteht im Kreisbereich K ein stetiges Feld nicht verschwindender Vektoren. Bezeichnet p_0 den Mittelpunkt von K und wandern wir von p_0 auf einem Kreisradius bis zum Punkt p , so dreht sich der dem laufenden Punkt entsprechende Feldvektor stetig, wobei die Richtung von $t(p_0)$ in diejenige von $t(p)$ übergeht. Ist $\omega(p)$ der Win-

kel, um den sich der Feldvektor, im positiven Sinn gemessen, insgesamt gedreht hat, so ist mit $\omega(p_0) = 0$ und mit Respektierung der verlangten Stetigkeit auf allen Radien von K mit $\omega(p)$ eine in K eindeutig definierte und dort überall stetige Funktion gegeben. Nach Satz 1.1 gibt es ein Punktpaar $p, q \in L$ so, dass $\varrho(p, q) = \varrho$ und $\omega(p) = \omega(q)$ ausfällt, so dass die Vektoren $t(p)$ und $t(q)$ parallel sind (was hier wie im folgenden auch gleichgerichtet bedeuten soll).

Vergleicht man jedoch die Definition von $t(p)$ mit der Nebenbedingung in unserm Satz, so gewahrt man, dass $t(p)$ und $t(q)$ entgegengesetzt gerichtet sein müssen. Dieser Widerspruch zeigt die Unzulässigkeit unserer Gegenannahme.

Satz 1.3: *Sind $\varphi(p)$, $\psi(p)$ und $\chi(p)$ drei stetige Funktionen im Kreisbereich K und gibt es einen festen Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) so, dass für jedes (geordnete) Punktpaar $p, q \in L$ des Kreisrandes L , das der Distanzbedingung $\varrho(p, q) = \varrho$ genügt, die Beziehungen*

$$\varphi(q) = \psi(p); \quad \psi(q) = \chi(p); \quad \chi(q) = \varphi(p)$$

gelten, so gibt es einen Punkt $p \in K$ derart, dass

$$\varphi(p) = \psi(p) = \chi(p)$$

Beweis 1.3: Die Gegenannahme besagt, dass für $p \in K$ stets

$$[\varphi(p) - \psi(p)]^2 + [\psi(p) - \chi(p)]^2 > 0$$

ausfallen soll. Ähnlich wie im vorstehenden Beweis lassen wir in p den Vektor $t = t(p) = [\varphi(p) - \psi(p)] \mathbf{x} + [\psi(p) - \chi(p)] \mathbf{y}$ angreifen und erzeugen in K wieder ein stetiges Feld nichtverschwindender Vektoren. Mit der gleichen Überlegung wie oben kann wieder ein Punktpaar $p, q \in L$ so gewählt werden, dass die beiden Vektoren $t(p)$ und $t(q)$ parallel sind. Nach dem für t gewählten Ansatz muss die Determinantenbedingung $\Delta = 0$ erfüllt sein, wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi(p) - \psi(p) & \psi(p) - \chi(p) \\ \varphi(q) - \psi(q) & \psi(q) - \chi(q) \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Berücksichtigt man hier die in unserem Satz vorausgesetzten Beziehungen, so resultiert durch einfache Ausrechnung

$$-2\Delta = [\varphi(p) - \psi(p)]^2 + [\psi(p) - \chi(p)]^2 + [\chi(p) - \varphi(p)]^2;$$

somit stellt sich $\Delta = 0$ mit der oben getroffenen Gegenannahme in Widerspruch.

2. Stetige Funktionen auf der Kugelfläche; Spiegelungssätze

Im gewöhnlichen euklidischen Raum R beziehen wir uns auf eine Kugelfläche S und betrachten insbesondere stetige Funktionen $\Phi(p)$, die für alle Punkte $p \in S$ definiert sind. Der Wertevorrat solcher Funktionen unterliegt gewissen Bindungen. Die

drei nachfolgenden Sätze drücken solche Gesetze aus, zu deren Formulierung Spiegelungen Σ an Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugelfläche S herangezogen werden.

Satz 2.1: *Sind $\Phi(p)$ und $\Psi(p)$ zwei stetige Funktionen auf der Kugelfläche S und sind $u_0, v_0 \in S$ zwei vorgegebene Punkte, so gibt es eine Spiegelung Σ so, dass für ihre Bildpunkte $u, v \in S$ die Bedingungen*

$$\Phi(u) = \Phi(v); \quad \Psi(u) = \Psi(v)$$

erfüllt sind.

Beweis 2.1: Ohne wesentliche Einschränkung darf angenommen werden, dass der Nordpol $\hat{p}_0 \in S$ Mittelpunkt eines u_0 und v_0 verbindenden Meridiankreisbogens ist. Es sei L der Äquator von S und K der von L berandete Kreisbereich. Für einen Punkt $p \in K$ bezeichne $\hat{p} \in S$ den lotrecht über p stehenden Punkt der nördlichen Hemisphäre von S . Weiter sei Σ_p die Spiegelung an der durch den Kugelmittelpunkt \hat{p}_0 gehenden Symmetrieebene der beiden antipodischen Punkte \hat{p} und \hat{p}^* . Durch die Ansätze $\varphi(p) = \Phi(u) - \Phi(v)$ und $\psi(p) = \Psi(u) - \Psi(v)$, wobei u und v die Bildpunkte von u_0 und v_0 bezüglich Σ_p sind, werden zwei stetige Funktionen in K definiert, welche mit $\varrho = \pi/2$ die Voraussetzungen von Satz 1.2 erfüllen. In der Tat gelten für die Bildpunkte von u_0 und v_0 bezüglich der Spiegelungen Σ_p und Σ_q mit $p, q \in L$, $\varrho(p, q) = \pi/2$ die Relationen $u_p = v_q, v_p = u_q$. Die Behauptung von Satz 1.2 deckt sich nun mit der hier nachzuweisenden.

Einen bekannten Sachverhalt bei einer stetigen Funktion auf der Kugelfläche verschärft der folgende

Satz 2.2: *Ist $\Phi(p)$ eine stetige Funktion auf der Kugelfläche S und sind $u_0, v_0, w_0 \in S$ drei vorgegebene Punkte, die ein reguläres Dreieck bilden, so gibt es eine Spiegelung Σ so, dass für die Bildpunkte $u, v, w \in S$ die Bedingung*

$$\Phi(u) = \Phi(v) = \Phi(w)$$

erfüllt wird.

Es handelt sich hier um ein erstmals von DE MIRA-FERNANDES [14] erzieltes Resultat, das mit dem spezielleren Fall eines rechtwinkligen regulären Dreiecks das Theorem von KAKUTANI [12] einschliesst. Allerdings beziehen sich die genannten Aussagen auf beliebige Drehungen in S anstelle der mit unserem Satz vorgesehenen Spiegelungen. Da aber die zweiparametrische Schar der Spiegelbilder eines regulären Dreiecks in S eine echte Teilmenge der dreiparametrischen Schar der entsprechenden Drehbilder ausmacht, wird mit dem Spiegelungssatz mehr ausgesagt. So lässt sich KAKUTANIS Satz, wonach eine stetige Funktion der Richtungen im Raum stets für drei paarweise orthogonale Richtungen gleiche Werte annehmen muss, dahin verschärfen, dass dies für drei Richtungen der Fall ist, die spiegelbildlich zu den drei Koordinatenrichtungen im Raum liegen.

Durch YAMABE und YUJOBO [17] ist der Kakutanische Satz auf den n -dimensionalen Raum erweitert worden; danach nimmt eine stetige Richtungsfunktion für n paarweise aufeinander orthogonal stehende Richtungen gleiche Werte an. — Ferner wurde das Theorem von MIRA FERNANDES von E. F. FLOYD [5] insofern verallgemeinert, als an die Stelle eines regulären Dreiecks ein beliebiges Dreieck treten kann;

vermutlich reichen in diesem allgemeineren Fall die Spiegelungen aber nicht mehr aus, um eine entsprechende Verschärfung zu formulieren.

Beweis 2.2: Es darf angenommen werden, dass der Nordpol $\hat{p}_0 \in S$ Symmetriezentrum des von u_0, v_0, w_0 gebildeten gleichseitigen sphärischen Dreiecks ist und dass die gewählte alphabetische Reihenfolge der Punktbezeichnungen dem positiven Umlaufssinn in der Äquatorebene entspricht. Dort begrenzt der Äquator L wieder den Kreisbereich K . Mit analogen Festsetzungen wie beim vorangehenden Beweis setzen wir für einen Punkt $p \in K$ ähnlich

$$\varphi(p) = \Phi(u); \quad \psi(p) = \Phi(v); \quad \chi(p) = \Phi(w),$$

wo u, v, w die Bildpunkte von u_0, v_0, w_0 bezüglich der Spiegelung Σp bezeichnen, und gewinnen so drei stetige Funktionen in K , welche mit $\varrho = 2\pi/3$ die Voraussetzungen von Satz 1.3 erfüllen. In der Tat gelten für die Bildpunkte von u_0, v_0, w_0 bezüglich der beiden Spiegelungen Σp und Σq mit $p, q \in L$ und $\varrho(p, q) = 2\pi/3$ die Relationen $u_p = w_q; v_p = u_q; w_p = v_q$. Die Behauptung von Satz 1.3 ist mit der hier zu beweisenen identisch.

Ein Satz, der etwas weniger aussagt, als man bei der Erörterung der Ausgangssituation erhofft, ist der folgende

Satz 2.3: Ist $\Phi(p)$ eine stetige Funktion auf der Kugelfläche S und sind

$$u_0, v_0, u_0^*, v_0^* \in S$$

vier vorgegebene Punkte, die ein Rechteck derart bilden, dass sich die Punkte u_0 und u_0^* bzw. v_0 und v_0^* diagonal gegenüberliegen, so gibt es eine Spiegelung Σ so, dass für die Bildpunkte $u, v, u^*, v^* \in S$ die Bedingungen

$\Phi(u) = \Phi(u^*); \quad \Phi(v) = \Phi(v^*)$
erfüllt sind.

Für vier Punkte, die ein einem Grosskreis der Kugelfläche S einbeschriebenes Rechteck bilden, konnte LIVESAY [13] wesentlich mehr zeigen. Für ein passendes Drehbild des Rechtecks nimmt eine stetige Funktion für alle vier Eckpunkte gleiche Werte an. Der Livesaysche Satz verallgemeinert ein bekanntes Resultat von DYSON [4], der schon etwas früher das analoge Ergebnis für ein Quadrat erzielte.

Beweis 2.3: Wieder sei $\hat{p}_0 \in S$ Mittelpunkt des von u_0, v_0, u_0^*, v_0^* gebildeten sphärischen Vierecks. Analog wie in den beiden vorangehenden Beweisen setzen wir für einen Punkt $p \in K$

$$\varphi(p) = \Phi(u) - \Phi(u^*) \quad \text{und} \quad \psi(p) = \Phi(v) - \Phi(v^*),$$

wo u, v, u^*, v^* die Bildpunkte von u_0, v_0, u_0^*, v_0^* bezüglich der Spiegelung Σp bezeichnen, wodurch zwei stetige Funktionen in K definiert sind, die mit $\varrho = \pi/2$ die Voraussetzungen von Satz 1.2 erfüllen. In der Tat gelten für zwei Spiegelungen Σp und Σq mit $p, q \in L$ und $\varrho(p, q) = \pi/2$ die Relationen $u_p = u_q^*; u_q = u_p^*; v_p = v_q^*; v_q = v_p^*$. Die Behauptung von Satz 1.2 deckt sich mit der hier nachzuweisenden.

3. Stetige Richtungsfelder

Eine Richtung in der Ebene E oder im Raum R soll durch einen Einheitsvektor t repräsentiert werden. Ist jedem Punkt $p \in K$ des Kreisbereichs K eine Richtung $t = t(p)$ zugeordnet derart, dass t mit p stetig variiert, so ist damit ein stetiges Richtungsfeld in K gegeben. Zur Veranschaulichung denke man sich in jedem Punkt $p \in K$ den Richtungsvektor $t(p)$ angreifend, der sich bei stetiger Veränderung von p stetig dreht.

Auch für stetige Richtungsfelder bestehen mannigfaltige Bindungen. Einige einfache Aussagen dieser Art, die bekannte Hilfssätze der elementaren Stetigkeitsgeometrie darstellen, geben die folgenden drei sich auf den ebenen Fall beziehenden Sätze:

Satz 3.1: *Ist $t(p)$ ein stetiges Richtungsfeld im Kreisbereich K und ist ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) ein vorgegebener Winkel, so gibt es auf dem Kreisrand L ein Punktpaar p, q der vorgeschriebenen Distanz $\varrho(p, q) = \varrho$ derart, dass die Richtungen $t(p)$ und $t(q)$ parallel sind.*

Beweis 3.1: Ist p_0 der Mittelpunkt von K und bezeichnet $\omega(p)$ den Winkel, um den man den Richtungsvektor $t(p_0)$ im positiven Sinne drehen muss, damit dieser mit $t(p)$ parallel wird, so lässt sich – wie bereits beim Beweis 1.2 ausgeführt – die Vieldeutigkeit des genannten Winkels derart ausschalten, dass, ausgehend von der Festsetzung $\omega(p_0) = 0$, eine in K überall eindeutig und stetig definierte Funktion $\omega(p)$ gegeben ist. Nach Satz 1.1 gibt es zu gegebenem ϱ zwei Punkte $p, q \in L$ so, dass $\omega(p) = \omega(q)$ ausfällt, so dass $t(p)$ und $t(q)$ parallel sind.

Satz 3.2: *Ist $t(p)$ ein stetiges Richtungsfeld im Kreisbereich K , so gibt es auf dem Kreisrand L sowohl einen Punkt p , dessen Richtung $t(p)$ radial nach aussen weist, als auch einen Punkt q , dessen Richtung $t(q)$ radial nach innen weist.*

Beweis 3.2: Wir nehmen zunächst an, es gäbe auf L keine radial nach innen weisende Richtung. Bezeichnet $r(p)$ für $p \in L$ den radial nach aussen weisenden Richtungsvektor, so wird $t(p) \neq -r(p)$ für alle $p \in L$ gelten. Wir erweitern das im Kreisbereich K vom Radius 1 gegebene stetige Richtungsfeld zu einem solchen, das im konzentrischen Kreisbereich \tilde{K} vom Radius 2 definiert ist und in K mit dem gegebenen übereinstimmt, in der folgenden Weise: Bezeichnet p_λ für $0 \leq \lambda \leq 1$ einen Punkt von \tilde{K} , der mit $p \in L$ auf dem nämlichen Radialstrahl durch den Mittelpunkt p_0 liegt und von p_0 den Abstand $1 + \lambda$ aufweist, so sei der Richtungsvektor

$$t(p_\lambda) = \frac{\lambda r(p) + (1 - \lambda) t(p)}{\tau_\lambda},$$

wo

$$\tau_\lambda = \{\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 + 2\lambda(1 - \lambda)r(p) t(p)\}^{1/2}$$

gesetzt ist. Für das auftretende Skalarprodukt gilt $r(p) t(p) > -1$, so dass $\tau_\lambda > 0$ ausfällt. Damit ist in \tilde{K} ein stetiges Richtungsfeld gegeben. Da aber $t(p_1) = r(p)$ ist, sind alle Vektoren auf der Randlinie von K radial nach aussen gerichtet. Nach Satz 3.1 müssten aber Paare paralleler Richtungen auftreten, was hier ausgeschlossen ist. Unsere Annahme muss also falsch sein. Analog zeigt man, dass auf L eine radial nach aussen weisende Richtung realisiert sein muss.

Satz 3.3: Sind $t(p)$ und $\tilde{t}(p)$ zwei stetige Richtungsfelder im Kreisbereich K und ist ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) ein vorgegebener Winkel, so gibt es auf dem Kreisrand L ein Punktpaar p, q der vorgeschriebenen Distanz $\varrho(p, q) = \varrho$ derart, dass die beiden Richtungen $t(p)$ und $t(q)$ den entgegengesetzt gleichen Winkel miteinander bilden wie die Richtungen $\tilde{t}(p)$ und $\tilde{t}(q)$.

Beweis 3.3: Sind $\omega(p)$ und $\tilde{\omega}(p)$ die den beiden Feldern zugeordneten Hilfsfunktionen, wie dies beim Beweis 3.1 näher erörtert wurde, so ist $\omega(p) + \tilde{\omega}(p)$ ebenfalls eine in K stetige Funktion, für die es nach Satz 1.1 zwei Punkte $p, q \in L$ der vorgeschriebenen Distanz ϱ so geben muss, dass $\omega(p) + \tilde{\omega}(p) = \omega(q) + \tilde{\omega}(q)$ gilt. Aus der geometrischen Deutung der Folgerung $\omega(p) - \omega(q) = -[\tilde{\omega}(p) - \tilde{\omega}(q)]$ ergibt sich die nachzuweisende Behauptung.

Ist jedem Punkt $p \in S$ der Kugelfläche S eine Richtung $t(p)$ im Raum so zugewiesen, dass $t(p)$ stetig von p abhängt, so liegt ein stetiges Richtungsfeld auf S vor. Gehört jeder Richtungsvektor $t(p)$ der im Angriffspunkt p an S gelegten Tangentialebene an, so heisst das Feld tangentiel. Hier gilt es einen wichtigen bekannten Tatbestand festzustellen, nämlich:

Satz 3.4: Es existiert kein stetiges tangentielles Richtungsfeld auf der Kugelfläche S .

Es handelt sich um einen von POINCARÉ [15] erstmals bewiesenen Satz. Der sich auf n -dimensionale Sphären, also auf Randflächen $(n + 1)$ -dimensionaler euklidischer Vollkugeln beziehende berühmte Satz von BROUWER-POINCARÉ sagt allgemeiner aus, dass ein stetiges tangentielles Richtungsfeld auf der n -dimensionalen Sphäre dann und nur dann möglich ist, wenn n ungerade ist.

Beweis 3.4: Es sei L der in der Ebene E liegende Äquator von S , der den Kreisbereich K berandet. Durch stereographische Projektion des Richtungsfeldes der südlichen Hemisphäre von S auf E vom Nordpol aus erzeugt man in K das stetige Richtungsfeld $t(p)$; analog gewinnt man ein zweites Richtungsfeld $\tilde{t}(p)$ in K durch entsprechende Projektion des Richtungsfeldes der nördlichen Hemisphäre von S vom Südpol aus. Für einen Punkt $p \in L$ liegen die beiden Feldvektoren $t(p)$ und $\tilde{t}(p)$ spiegelsymmetrisch zu der Äquatortangente in p . Bezeichnen $\alpha(p)$ bzw. $\tilde{\alpha}(p)$ die Winkel, um die man $t(p)$ bzw. $\tilde{t}(p)$ im positiven Sinn drehen muss, damit diese Vektoren mit dem im positiven Umlaufsinn von L orientierten Tangentenvektor in p parallel gerichtet sind, so ist $\tilde{\alpha}(p) = -\alpha(p) \pmod{2\pi}$. Es sei $0 < \varrho < \pi$ und $p, q \in L$ mit $\varrho(p, q) = \varrho$. Der Winkel zwischen $t(p)$ und $t(q)$ bzw. zwischen $\tilde{t}(p)$ und $\tilde{t}(q)$ ist dann $\Delta = \alpha(q) - \alpha(p) + \varrho$ bzw. $\tilde{\Delta} = \tilde{\alpha}(p) - \tilde{\alpha}(q) + \varrho$. Nach Satz 3.3 gilt für ein passendes Punktpaar $\tilde{\Delta} = -\Delta$, also $\varrho = 0 \pmod{\pi}$; damit ist ein Widerspruch erzielt.

Eine anschauliche Folgerung aus dem Satz von POINCARÉ drückt der sogenannte «Igelsatz» aus, dessen scherhafte Einkleidungsmöglichkeit mit dem gewählten Namen vorweggenommen ist. Es handelt sich um den

Satz 3.5: Ist $t(p)$ ein stetiges, auf der Kugelfläche S definiertes Feld räumlicher Richtungen, so gibt es einen Punkt $p \in S$ derart, dass die Richtung $t(p)$ auf der Kugelfläche S orthogonal steht.

Beweis 3.5: Würde keine Richtung auf der Kugelfläche S orthogonal stehen, so liesse sich durch Orthogonalprojektion des räumlichen Richtungsfeldes auf S ein stetiges tangentielles Richtungsfeld erzeugen, das aber nach Satz 3.4 nicht existieren kann.

4. Stetige Abbildungen

Mit den vorstehend in Betracht gezogenen stetigkeitsgeometrischen Gegenständen, also mit stetigen Funktionen und Vektorfeldern in engster Verbindung stehen die stetigen Abbildungen, die sich von ihnen lediglich durch die besondere Art der Interpretation unterscheiden.

Die nachfolgenden Abbildungssätze über Kreisbereich und Kugelfläche weisen deutliche topologische Gesichtszüge auf. Beziehen sich die Studien lediglich auf diese einfachsten Figuren, so befindet man sich in einem Grenzgebiet zwischen Elementargeometrie und Topologie, wo die Frage nach der Zugehörigkeit einer einzelnen Aussage keinen guten Sinn mehr besitzt, zumal es hier auch Tatbestände gibt, die Wechselwirkungen zwischen den in verschiedenen Machtbereichen liegenden Gesetzen zum Ausdruck bringen. Weiteres zu dieser Frage enthält der instruktive Vortrag von HOPF [10].

Wir beginnen mit einem ebenen Sonderfall des berühmten Fixpunktsatzes von BROUWER [3]:

Satz 4.1: *Eine stetige Abbildung $f(p)$ des Kreisbereichs K in sich weist wenigstens einen Fixpunkt auf, das heißt, es gibt einen Punkt $p \in K$ so, dass $f(p) = p$ ist.*

Beweis 4.1: Wir treffen die Gegenannahme, wonach $p \neq f(p)$ für alle $p \in K$ gelten soll. Wird in jedem Punkt $p \in K$ der von p nach $f(p)$ weisende Richtungsvektor $t(p)$ angebracht, so entsteht ein stetiges Richtungsfeld in K . Nach Satz 3.2 muss für einen passenden Randpunkt $p \in L$ die Richtung $t(p)$ radial nach aussen zeigen, was der Konstruktion unseres Feldes widerspricht.

Hier schliessen sich zwei einfache Sätze dieser Art an.

Satz 4.2: *Ist $f(p)$ eine stetige Abbildung des Kreisbereiches K in den Kreisrand L und wird ein Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) vorgegeben, so gibt es zwei Punkte $p, q \in L$ des Randes der Distanz $\varrho(p, q) = \varrho$, die das nämliche Bild aufweisen, so dass also $f(p) = f(q)$ gilt.*

Beweis 4.2: Wird in jedem Punkt $p \in K$ die Richtung des Vektors angebracht, welcher den Kreismittelpunkt p_0 mit $f(p) \in L$ verbindet, so entsteht ein stetiges Richtungsfeld in K . Nach Satz 3.1 gibt es zwei Punkte $p, q \in L$ der vorgeschriebenen Distanz ϱ mit parallelen Richtungen. Offenbar gilt dann $f(p) = f(q)$.

Satz 4.3: *Es existiert keine stetige Abbildung des Kreisbereiches K in den Kreisrand L , welche den Rand punktweise fest lässt.*

Beweis 4.3: Wählen wir $p, q \in L$, $p \neq q$ so, dass $f(p) = f(q)$ ausfällt, was nach Satz 4.2 möglich ist! Dies verträgt sich nicht mit der Annahme, dass L punktweise fest bleibt, wonach $f(p) = p$ für alle $p \in L$ gelten sollte.

Nun zur Kugelfläche:

Satz 4.4: *Ist $f(p)$ eine stetige Abbildung der Kugelfläche S in die Ebene E und ist der Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) vorgegeben, so gibt es zwei Punkte $p, q \in S$ der vorgeschriebenen Distanz $\varrho(p, q) = \varrho$, welche das gleiche Bild aufweisen, so dass $f(p) = f(q)$ ist.*

Es handelt sich hier um einen wohl einfachsten nichttrivialen Spezialfall eines allgemein sich auf n -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeiten M_n mit Riemannscher Metrik beziehenden Satzes von HOPF [9], wonach sich bei einer stetigen Abbildung von M_n in den n -dimensionalen euklidischen Raum E_n stets zwei Punkte mit vorgeschriebener geodätischer Distanz ϱ finden lassen, deren Bilder in E_n zusammenfallen. Ein besonders wichtiger Spezialfall liegt dann vor, wenn M_n mit der n -dimensionalen Sphäre S_n identisch ist und spezieller noch $\varrho = \pi$ gesetzt wird. Es handelt sich dann um einen bekannten Antipodensatz, der aussagt, dass bei einer stetigen Abbildung der S_n in den E_n stets zwei antipodische Punkte das nämliche Bild aufweisen müssen. Vergleiche hierzu weiteres bei ALEXANDROFF und HOPF ([1] S. 486).

Beweis 4.4: Sind $\Phi(p)$ und $\Psi(p)$ für $p \in S$ die beiden Koordinaten des Bildpunktes $f(p) \in E$ bezüglich eines kartesischen Systems in E , so sind zwei stetige Funktionen auf S definiert, auf die sich Satz 2.1 anwenden lässt. Für zwei Punkte $p, q \in S$ der vorgeschriebenen sphärischen Distanz ϱ gilt dann $f(p) = f(q)$.

Satz 4.5: *Ist $f(p)$ eine stetige fixpunktfreie Abbildung der Kugelfläche S in sich, so gibt es einen Punkt $p \in S$, der in den antipodischen Punkt $p^* \in S$ übergeht, so dass also $f(p) = p^*$ ist.*

Beweis 4.5: Würde $f(p) \neq p$ und $f(p) \neq p^*$ zugleich für alle $p \in S$ gelten, so könnte man dadurch, dass man p mit $f(p)$ durch einen gerichteten Grosskreisbogen der Länge $< \pi$ verbindet, ein stetiges tangentielles Richtungsfeld auf S erzeugen, das aber nach Satz 3.4 nicht existiert.

5. Überdeckungssätze

Wir schliessen die Reihe unserer stetigkeitsgeometrischen Studien mit einigen Sätzen über abgeschlossene Überdeckungen ab. Die abgeschlossenen Punktmengen sind den Belangen der Stetigkeitsgeometrie aus verschiedenen Gründen gut angepasst. Bei den nachfolgenden Betrachtungen wird insbesondere der Umstand ausschlaggebend sein, dass der Abstand $\delta(p, A)$ eines Punktes von p von einer abgeschlossenen Menge A eine stetige Funktion von p ist und dann und nur dann verschwindet, wenn der Punkt p der Menge A angehört. Wir erinnern an die Definition von $\delta(p, A)$ als kleinste euklidische Distanz, die zwischen p und beliebigen Punkten von A realisiert wird.

Die beiden ersten Sätze beziehen sich auf Distanzen, die durch die einen Kreisbereich überdeckenden Punktmengen geliefert werden. Eine erste elementare Aussage ist

Satz 5.1: *Ist der Einheitskreisbereich K von drei abgeschlossenen Punktmengen überdeckt und ist die Distanz δ ($0 < \delta \leq \sqrt{3}$) vorgegeben, so enthält stets wenigstens eine*

der drei Mengen ein Punktpaar $p, q \in K$ der Distanz $\delta(p, q) = \delta$; die Distanzschranke $\sqrt{3}$ kann nicht vergrößert werden.

Beweis 5.1: Die mit K konzentrische Kreislinie L_δ vom Radius $2\delta/\sqrt{3}$ ist offenbar ebenfalls von den drei Punktmengen überdeckt. Beteiligt sich nur eine dieser drei Mengen, so ist die Behauptung bereits bewiesen, da auf L_δ zwei Punkte der Distanz δ liegen. Beteiligen sich an der Überdeckung von L_δ zwei oder alle drei Mengen, so lässt sich auf L_δ ein Punkt u wählen, der zum nichtleeren Durchschnitt zweier Mengen gehört. Bilden die Punkte v und w zusammen mit u ein der Kreislinie L_δ einbeschriebenes reguläres Dreieck der Seitenlänge δ , so lässt sich mit Verwendung eines nahe-liegenden Schubfachschlusses leicht einsehen, dass von den drei Punkten u, v, w wenigstens zwei derselben Menge angehören müssen. Die zusätzliche Aussage, dass die Schranke $\sqrt{3}$ nicht verbessert werden kann, ergibt sich aus der Tatsache, dass sich K durch drei kongruente Kreissektoren mit den Öffnungswinkeln $2\pi/3$ über-decken lässt, deren Durchmesser genau $\sqrt{3}$ betragen.

Etwas tiefer liegend und mit den vorstehenden Sätzen verbunden ist der folgende

Satz 5.2: Ist der Einheitskreisbereich K von drei abgeschlossenen Punktmengen mit leerem, gemeinsamem Durchschnitt überdeckt und wird die Distanz δ ($0 < \delta \leq 2$) vorgegeben, so enthält wenigstens eine der drei Mengen ein Punktpaar $p, q \in K$ der Distanz $\delta(p, q) = \delta$.

Beweis 5.2: Der Kreisbereich K sei durch die drei abgeschlossenen Punktmengen A, B, C überdeckt. Für einen Punkt $p \in K$ bezeichnen $\alpha = \alpha(p)$, $\beta = \beta(p)$ und $\gamma = \gamma(p)$ die Abstände der Mengen A, B und C von p . Wenigstens einer der drei Abstände muss verschwinden, so dass $\alpha \beta \gamma = 0$ ist; ferner sind nachfolgend noch die Bedingungen $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ und $\gamma \geq 0$ zu beachten. Setzen wir

$$2\tau^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2,$$

so muss $\tau > 0$ ausfallen, da andernfalls auf $\alpha = \beta = \gamma = 0$ geschlossen werden kann, was im Gegensatz zur Bedingung steht, dass der gemeinsame Durchschnitt $A \cap B \cap C$ leer sei. Sind u, v und w drei Einheitsvektoren, die paarweise den Winkel $2\pi/3$ einschliessen, so wird mit dem Ansatz $t(p) = (\alpha u + \beta v + \gamma w)/\tau$ in K ein stetiges Richtungsfeld definiert. Wählt man den Winkel ϱ so, dass $\delta = 2 \sin(\varrho/2)$ ist, so weisen zwei Punkte $p, q \in L$ des Randes von K , für die $\varrho(p, q) = \varrho$ ist, die Distanz δ auf. Nach Satz 3.1 können diese beiden Punkte so gewählt werden, dass $t(p)$ mit $t(q)$ parallel ist. Hieraus lässt sich schliessen, dass wenigstens eine der drei Bedingungen $\alpha(p) = \alpha(q) = 0$, $\beta(p) = \beta(q) = 0$, $\gamma(p) = \gamma(q) = 0$ erfüllt sein muss. Das Punktpaar p, q gehört zu einer der drei Mengen A, B oder C .

Der oben formulierte Überdeckungssatz 5.2 für den Kreisbereich ist stärker als der ebene Spezialfall des bekannten Lemmas von SPERNER [16], das sich auf die Überdeckung eines Dreiecks bezieht, wobei ausgesagt wird, dass drei abgeschlossene, ein Dreieck überdeckende Punktmengen einen nichtleeren Durchschnitt haben müssen, wenn sich die drei Mengen den drei Dreiecksseiten so zuordnen lassen, dass jede der Mengen mit der ihr entsprechenden Seite leeren Durchschnitt aufweist. Das Spernersche Lemma ist ein Korollar unseres Satzes, nicht aber umgekehrt.

Wir schliessen mit einem Überdeckungssatz für die Kugelfläche:

Satz 5.3: *Ist die Kugelfläche S von drei abgeschlossenen Punktmengen überdeckt und ist ein Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) vorgeschrieben, so enthält wenigstens eine der drei Mengen ein Punktpaar $p, q \in S$ der Distanz ϱ (p, q) = ϱ .*

Es handelt sich um eine Variante des Antipodensatzes von LUSTERNIK, SCHNIEREL-MANN und BORSUK, der in seiner n -dimensionalen Form aussagt, dass bei einer Überdeckung der Sphäre S_n durch $n + 1$ abgeschlossene Punktmengen wenigstens eine der Mengen ein antipodisches Punktpaar enthalten muss. Diese Aussage ist im Sonderfall der gewöhnlichen Kugelfläche in unserem Satz enthalten; sie entspricht der speziellen Wahl $\varrho = \pi$. Der sehr bekannte Antipodensatz für die Sphäre S_n erlaubt zahlreiche Varianten und Erweiterungen ähnlicher Art. Vergleiche hierzu auch HOPF [8]. Einen Beweis, der ohne höhere topologische Hilfsmittel, insbesondere ohne Verwendung algebraischer Methoden auskommt, gab BORSUK [2].

Beweis 5.3: Die Kugelfläche S sei von A , B und C überdeckt. Sind $\Phi(p)$ und $\Psi(p)$ die Abstände des Punktpaares $p \in S$ von A und B , so sind Φ und Ψ zwei stetige Funktionen auf S . Nach Satz 2.1 gibt es ein Punktpaar $p, q \in S$ mit der vorgeschriebenen Distanz ϱ so, dass $\Phi(p) = \Phi(q) = \alpha$ und $\Psi(p) = \Psi(q) = \beta$ ist. Aus $\alpha = 0$ folgt $p, q \in A$, aus $\beta = 0$ analog $p, q \in B$. Ist aber $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, so resultiert $p, q \in C$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Der hier für die gewöhnliche Kugelfläche bewiesene Satz lässt sich noch in der folgenden Weise verschärfen: Wenigstens eine der drei Mengen hat die Eigenschaft, zu *jedem* Winkel ϱ ($0 < \varrho \leq \pi$) ein Punktpaar der Distanz ϱ aufzuweisen. Vergleiche hierzu [6].

H. HADWIGER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXANDROFF, P., und H. HOPF, *Topologie I* (J. Springer, Berlin 1935).
- [2] BORSUK, K., *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math. 20, 177–190 (1933).
- [3] BROUWER, L. E. J., *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71, 97–115 (1912).
- [4] DYSON, F. J., *Continuous Functions Defined on Spheres*, Ann. Math., Princeton 54, 534–536 (1951).
- [5] FLOYD, E. E., *Real-valued Mappings of Spheres*, Proc. Amer. math. Soc. 6, 957–959 (1955).
- [6] HADWIGER, H., *Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich 1944, 211–214.
- [7] HADWIGER, H., *Ungelöste Probleme*, El. Math. 10, 131 f. (1955).
- [8] HOPF, H., *Freie Überdeckungen und freie Abbildungen*, Fundamenta Math. 28, 33–57 (1933).
- [9] HOPF, H., *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugaliae Math. 4, 129–139 (1944).
- [10] HOPF, H., *Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie*, Math. Phys. Semesterberichte 3, 16–29 (1953).
- [11] HOPF, H., *Vom Bolzanoschen Nullstellensatz zur algebraischen Homotopietheorie der Sphären*, Jber. dtsch. Math.-Ver. 56, 59–76 (1953).

- [12] KAKUTANI, S., *A Proof that There Exists a Circumscribing Cube Around any Closed Bounded Convex Set in R^3* , Ann. Math., Princeton 43, 739–741 (1942).
- [13] LIVESAY, G. R., *On a Theorem of F. J. Dyson*, Ann. Math., Princeton, 227–229 (1954).
- [14] MIRA FERNANDES, A. DE, *Funzioni continue sopra una superficie sferica*, Portugalae Math. 5, 132–134 (1946).
- [15] POINCARÉ, H., *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3^e partie), J. Math. pures appl. [4] 1, 167–244 (1885).
- [16] SPERNER, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 6, 265–272 (1928).
- [17] YAMABE, H., and Z. YUJOO, *On the Continuous Function Defined on a Sphere*, Osaka math. J. 2, 19–22 (1950).

Ungelöste Probleme

Nr. 29. Existe-t-il une infinité de nombres premiers p de la forme $8k + 1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant impair? (Tels sont par exemple les nombres 17, 41, 97.)

On peut démontrer que pour p premiers de la forme $8k + 3$ ou $8k + 5$ le nombre 2 appartient à un exposant pair et que pour p premiers de la forme $8k + 7$ le nombre 2 appartient à un exposant impair. MM. BROWKIN et MAKOWSKI ont remarqué qu'il existe une infinité de nombres premiers p de la forme $8k + 1$ tels que le nombre 2 appartient mod p à un exposant pair: tels sont, par exemple, tous les facteurs premiers des nombres de FERMAT $2^{2^n} + 1$, où $n = 2, 3, \dots$.

Il est encore à remarquer que M. A. SCHINZEL a déduit de son hypothèse H sur les nombres premiers [énoncée dans Acta Arithmetica 4, 188 (1958)] que la réponse à notre problème est positive.

W. SIERPIŃSKI

Nr. 30. M. S. ROLEWICZ a demandé si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} = +\infty,$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs naturels du nombre n . La réponse à cette question est négative. En effet, A. RÉNYI a démontré (dans le journal Izwestia A. N. SSSR. 1948, 57–78) qu'il existe une infinité de nombres premiers n tels que $n + 2$ a au plus k diviseurs premiers (où k est une constante absolue). Pareillement on peut démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers n tels que $n + 1$ a au plus k diviseurs premiers. Pour un tel n , $\sigma(n)$ a au plus k diviseurs premiers et le nombre $\sigma \sigma(n)/\sigma(n)$ est borné, d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma(n)}{n} < +\infty.$$

Le problème se pose si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sigma \sigma(n)}{n} < +\infty$$