Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1959)
Heft: 1

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

As for the excluded case $r = p - 2$, it is clear from (10), (12) and (15) that

$$\Delta_{p-2} = \frac{1}{(p-1)!}\left\{-(p-2)!\,A_1\,w^{p-2} + (p-1)!\left(n + \frac{p}{2} - 1\right) w^{p-1}\right\},$$

which reduces to

$$\Delta_{p-2} = \left\{(n-1)\,w + \frac{p}{2}\,(w-1)\right\} w^{p-2}. \tag{17}$$

L. CARLITZ, Durham (N.C., USA)

Ungelöste Probleme

Nr. 27. Es bedeute n eine beliebige natürliche Zahl. Mit s_n werde die Summe der sämtlichen Teiler von n bezeichnet, mit p_n die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von natürlichen Zahlen, wobei die Reihenfolge der Summanden als unwesentlich gilt. Also

$$p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 3,\ p_4 = 5,\ p_5 = 7,\ p_6 = 11,\ p_7 = 15,$$
$$p_8 = 22,\ p_9 = 30,\ p_{10} = 42,\ p_{11} = 56,\ p_{12} = 77 \text{ usw.}$$

Für die Darstellung von n als Summe von lauter *verschiedenen* natürlichen Zahlen spielen nach dem Pentagonalsatz EULERS die Pentagonalzahlen

$$\frac{1}{2}\,k\,(3\,k-1) \text{ mit } k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\,k\,(3\,k+1) \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oder zusammengefasst

$$\frac{1}{2}\,l\,(3\,l-1) \text{ mit } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

eine ausgezeichnete Rolle. Es sind dies die Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57,\ \ldots.$$

Zwischen s_n und den Pentagonalzahlen sowie zwischen p_n und den Pentagonalzahlen bestehen bekanntlich die Beziehungen (alternierend $++$ und $--$):

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} - s_{n-5} - s_{n-7} + s_{n-12} + s_{n-15} \cdots, \tag{1}$$

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} \cdots. \tag{2}$$

Dabei ist in (1) für eine Pentagonalzahl n für das dann formal auftretende letzte Glied s_0 die Zahl n selbst zu setzen. In (2) ist im gleichen Falle für p_0 der Wert 1 zu nehmen.

Unschwer erhält man die weitere merkwürdige Beziehung:

$$s_n = p_{n-1} + 2\,p_{n-2} - 5\,p_{n-5} - 7\,p_{n-7} + 12\,p_{n-12} + 15\,p_{n-15} \cdots. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) ergeben sich durch Anwenden von analytischen Hilfsmitteln. Insbesondere (3) legt die Frage nahe, wie sich dies rein arithmetisch begründen lässt, was doch zweifellos möglich sein sollte, da es sich um eine rein arithmetische Verflechtung der Pentagonalzahlen mit den Grössen s_n und p_n handelt.

L. LOCHER-ERNST

Aufgaben

Aufgabe 305. A convex (irregular) polygon P with n sides is subdivided into convex polygons by d diagonals which do not intersect in the interior of P. Let S_n denote the number of all such subdivisions, $d = 0, 1, 2, \ldots, n-3$. Here is a short table:

$$n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,$$
$$S_n = 1,\ 3,\ 11,\ 45,\ 197,\ 903.$$

Show (1) and (2):

$$S_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n-1}{k+1} \binom{n-3}{k} 2^{n-3-k}, \tag{1}$$

$$S_n \equiv 1 \pmod{n} \quad (n = \text{prime}). \tag{2}$$

The problem is not new, but the form (1) of the solution seems to be new.

G. PÓLYA, Stanford University, USA

Solution. Denote the vertices of a polygon of $n+1$ sides by $0, 1, 2, \ldots, n$ and put $V_1 = 1$, $V_n = S_{n+1}$. By considering diagonals through the vertex 0, we get the recursion formulas

$$V_2 = V_1,$$
$$V_3 = 2\,V_2 + V_1^2,$$
$$V_4 = 2\,V_3 + 4\,V_1 V_2 + V_1^3,$$
$$V_5 = 2\,V_4 + 4\,V_1 V_3 + 4\,V_2^2 + 6\,V_1^2 V_2 + V_1^4,$$

and so on. Now put

$$g(x) = \sum_1^\infty V_n X^n, \qquad h(x) = x + \sum_2^\infty 2\,V_n X^n.$$

Then the above recurrences imply

$$g(x) - x = x \sum_1^\infty h^k(x) = \frac{x\,h(x)}{1 - h(x)}.$$

Since $h(x) = 2\,g(x) - x$, this yields

$$2\,g^2(x) - (1+x)\,g(x) + x = 0. \tag{*}$$

The problem is therefore equivalent to SCHRÖDER's second problem (see NETTO's *Lehrbuch der Combinatorik*, pp. 196–198).

It follows from (*) that

$$g(x) = \sum_1^\infty V_n X^n = \frac{1}{4}\,\{1 + x - (1 - 6\,x + x^2)^{1/2}\}.$$

Thus

$$V_n = -\frac{1}{4}\,P_n^{(-1/2)}(3),$$