Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1958)

Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 301. Schneiden zwei Kugeln K_1, K_2 mit den Radien r_1, r_2 ($r_1 \geqq r_2$) sich gegenseitig an, so entstehen folgende Körper $\mathfrak{K}$: 1. Der K_1 und K_2 gemeinsame Stosskörper S. 2. Der Vereinigungskörper $V = K_1 + K_2 - S$. 3. Der Restkörper der grösseren Kugel $R_1 = K_1 - S$. 4. Der Restkörper der kleineren Kugel $R_2 = K_2 - S$. Unter der Dicke d eines Körpers $\mathfrak{K}$ verstehe man im Fall von S und V die Summe, im Fall von R_1 und R_2 die Differenz der Höhen der Kugelsegmente, aus denen $\mathfrak{K}$ durch Addition bzw. Subtraktion entsteht.

Man beweise: Es gibt genau zwei verschiedene Werte d_1 und d_2 für die Dicke eines Körpers $\mathfrak{K}_0$ mit vorgegebenem Volumen V_0 und vorgegebener Oberfläche F_0, sofern die isoperimetrische Ungleichung $F_0^3 > 36\,\pi\,V_0^2$ erfüllt ist. Es sei $d_1 > d_2$. Für d_2 lässt sich $\mathfrak{K}_0$ auf unendlich viele Weisen in jeder der Formen S, R_1, R_2 realisieren. Für d_1 sind nur Realisierungen in der Form V möglich. Diese existieren aber nur, wenn $F_0^3 < 72\,\pi\,V_0^2$.

Die Realisierungen S und V bzw. R_1 und R_2 werden durch Ungleichungen für $r_1 + r_2$ bzw. $r_1 - r_2$ bestimmt. Wie lauten diese Ungleichungen? E. TROST, Zürich

Lösung: I. Körper V und S. Wir betrachten zunächst den Körper V. Sind x bzw. y die Segmenthöhen in den Kugeln mit den Radien r_1 bzw. r_2 und hat V die Oberfläche F_0 und das Volumen V_0, so gelten die Beziehungen:

$$(2\,r_1 - x)\,x = (2\,r_2 - y)\,y, \tag{1}$$

$$2\,\pi\,r_1 x + 2\,\pi\,r_2 y = F_0, \tag{2}$$

$$\frac{\pi\,x^2}{3}\,(3\,r_1 - x) + \frac{\pi\,y^2}{3}\,(3\,r_2 - y) = V_0. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$r_1 = \frac{F_0/\pi + x^2 - y^2}{4\,x}, \qquad r_2 = \frac{F_0/\pi - x^2 + y^2}{4\,y}. \tag{4}$$

Setzt man (4) in (3) ein, so erhält man nach einiger Umformung für $x + y = d$ die kubische Gleichung

$$\pi\,d^3 - 3\,F_0\,d + 12\,V_0 = 0. \tag{5}$$

Aus der isoperimetrischen Ungleichung folgt, dass (5) drei reelle Wurzeln hat:

$$d_1 = 2\sqrt{\frac{F_0}{\pi}}\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad d_{2,3} = -2\sqrt{\frac{F_0}{\pi}}\cos\left(60^\circ \pm \frac{\varphi}{3}\right), \qquad \cos\varphi = -\frac{6\,V_0}{\sqrt{F_0^3/\pi}}.$$

Da d_3 negativ wird, gibt es für die Dicke des Körpers V nur die beiden positiven Werte d_1 und d_2. Wegen $\pi/6 < \varphi/3 < \pi/3$ hat man

$$d_1^2 > \frac{F_0}{\pi} \qquad \text{und} \qquad d_2^2 < \frac{F_0}{\pi}. \tag{6}$$

Setzt man in (4) $y = d - x$, so ergibt sich für x mit $s = r_1 + r_2$ die quadratische Gleichung

$$4\,(s - d)\,x^2 - 4\,d\,(s - d)\,x + d\left(\frac{F_0}{\pi} - d^2\right) = 0. \tag{7}$$

Ferner führt $x \leqq 2\,r_1$ auf die Ungleichung

$$\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 < \frac{F_0}{2\,\pi} - \frac{d^2}{4}. \tag{8}$$

Aus (8) folgt die Bedingung $F_0 > \pi d^2/2$, die für d_2 wegen (6) immer erfüllt ist. Für d_1 ist diese Bedingung nur dann erfüllt, wenn $\varphi/3 > \pi/4$, also $F_0^3 < 72\,\pi\,V_0^2$ ist. Wir unterscheiden für die Realisierungen von V folgende *Fälle*:

A: $d = d_1$, also $d_1^2 > F_0/\pi$. Es gilt $F_0^3 < 72\,\pi\,V_0^2$, was gleichbedeutend ist mit $F_0 > \pi\,d_1^2/2$.

1. Es sei $s < d_1$. Damit (7) eine reelle Lösung hat, muss $F_0 \geqq \pi\,d_1\,s$ gelten. Aus (7) und (8) zusammen ergibt sich ferner $s > d_1/2$, somit ist in diesem Fall

$$\frac{d_1}{2} < s \leqq \frac{F_0}{\pi\,d_1}.$$

2. Es sei $s > d_1$. Hier handelt es sich offenbar um einen Körper S. Für den Körper S gilt aber dieselbe kubische Gleichung (5), was man leicht erkennt, wenn man $x' = 2\,r_1 - x$ und $y' = 2\,r_2 - y$ setzt. Damit (7) eine reelle Lösung hat, muss jetzt $\pi\,d_1\,s \geqq F_0$ sein, was wegen $s > d_1$ und (6) schon erfüllt ist. Aus (7) und (8) zusammen folgt aber $s < d_1/2$ im Widerspruch zur Annahme $s > d_1$. Es gibt also in diesem Fall keine Realisierungen von S.

B: $d = d_2$, also $d_2^2 < F_0/\pi$.

1. Es sei $s < d_2$. (7) und (8) zusammen ergeben $s < d_2/2$, was unmöglich ist. Für $s < d_2$ existiert daher keine Realisierung.

2. Es sei $s > d_2$, was wieder einem Körper S entspricht. (7) und (8) zusammen ergeben hier $s > d_2/2$. Aus (7) allein folgt $\pi\,d_2\,s \geqq F_0$. Wegen (6) ist $d_2/2 < F_0/(\pi\,d_2)$, so dass die Bedingung $s \geqq F_0/(\pi\,d_2)$ für die Realisierung von S genügt.

II. Körper R_1. Bedeuten x und y wieder die Segmenthöhen, so ist jetzt $x - y = d$, und es ergibt sich für d wieder die kubische Gleichung (5). Setzt man $t = r_1 - r_2$, so erhält man für x wieder die quadratische Gleichung (7). Ähnliche Überlegungen wie vorhin zeigen, dass Realisierungen nur für $d = d_2$ möglich sind, wobei $0 \leqq t < d_2/2$ gelten muss.

III. Körper R_2: Realisierungen sind nur für $d = d_2$ möglich, und zwar für jedes $t \geqq 0$.

H. Meili, Winterthur

Aufgabe 302. a) Es sei eine unendliche Punktmenge p_i $(1 \leqq i < \infty)$ gegeben, die im Endlichen keinen Häufungspunkt hat. K_m sei der grösste Kreis mit dem Mittelpunkt p_m, der im Innern keinen andern Punkt p_i enthält. Dann gibt es mindestens einen Punkt p_m mit der Eigenschaft, dass auf der Peripherie von K_m höchstens 6 Punkte p_i liegen.

b) Wenn die Punktmenge p_i $(1 \leqq i \leqq n)$ endlich ist, so gibt es einen Punkt p_m so, dass auf der Peripherie von K_m höchstens 3 Punkte liegen.

P. Erdös und D. Tamari, Haifa

Lösung (nach Angaben der Aufgabensteller): a) Es sei p_b ein Punkt mit minimaler Entfernung von p_a. Der Kreis mit dem Mittelpunkt p_a und dem Radius $\overline{p^v p_b}$ ist der Kreis K_a, und wenn auf seiner Peripherie höchstens 6 Punkte p_i liegen, so sind wir fertig. Liegen mindestens 7 Punkte auf K_a, so gibt es unter diesen zwei Punkte p_c und p_d so, dass $\overline{p_c p_d} = k_1 \overline{p_a p_b}$, wo $k_1 < 1$. Es sei p_e ein Punkt mit minimaler Entfernung von p_c. Dann ist $\overline{p_c p_e} \leqq \overline{p_c p_d} = k_1 \overline{p_a p_b}$. Gibt es auf der Peripherie des durch p_e gehenden Kreises K_c mindestens 7 Punkte, so befinden sich unter diesen wieder zwei Punkte $p_{c'}$ und $p_{d'}$ mit $\overline{p_{c'} p_{d'}} = k_2 \overline{p_c p_e}$ $(k_2 < 1)$, also ist $\overline{p_{c'} p_{d'}} \leqq k_1 k_2 \overline{p_a p_b}$. Ist $p_{e'}$ ein Punkt mit minimaler Entfernung von $p_{c'}$, also

$$\overline{p_{c'} p_{e'}} \leqq \overline{p_{c'} p_{d'}} \leqq k_1 k_2 \overline{p_a p_b},$$

und liegen auf dem durch $p_{e'}$ gehenden Kreis $K_{c'}$ mindestens 7 Punkte, so gibt es unter diesen zwei Punkte $p_{c''}$ und $p_{d''}$ mit $\overline{p_{c''} p_{d''}} = k_3 \overline{p_{c'} p_{e'}}$ $(k_3 < 1)$, also ist $\overline{p_{c''} p_{d''}} \leqq k_1 k_2 k_3 \overline{p_a p_b}$. Tritt bei der Fortsetzung dieses Verfahrens nie ein Kreis K_m auf, auf dessen Peripherie höchstens 6 Punkte liegen, so erhalten wir eine unendliche Punktmenge innerhalb eines Kreises um p_a, dessen Radius kleiner als $(1 + k_1 + k_1 k_2 + k_1 k_2 k_3 + \cdots)\,\overline{p_a p_b}$ und damit endlich ist. Eine solche Punktmenge besitzt aber einen Häufungspunkt.

b) Gibt es nur endlich viele Punkte in der Menge, so existiert eine kleinste Entfernung $\overline{p_x p_y}$. p_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ seien die Punkte mit der Eigenschaft, dass es zu p_s ein $p_{s'}$ mit $\overline{p_s p_{s'}} = \overline{p_x p_y}$ gibt. Ist p_m ein Eckpunkt der konvexen Hülle der p_s, so befinden sich offenbar höchstens 3 Punkte in minimaler Entfernung von p_m und damit auf der Peripherie von K_m.

Aufgabe 303. Man betrachte diejenigen Dreiecke mit verschiedenen Seitenlängen, bei denen die Masszahlen der Strecken, die auf den Seiten von den inneren Winkelhalbierenden abgeschnitten werden, ganzzahlig sind. Unter diesen Dreiecken ist dasjenige zu bestimmen, dessen Umfangsmasszahl ein Minimum ist. J. SCHOPP, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers: Die Masszahlen der Seiten des gesuchten Dreiecks seien $a < b < c$. Ferner sei $x = a/m$, $y = b/m$, $z = c/m$, wo m den grössten gemeinsamen Teiler von a, b, c bezeichnet. $x < y < z$ sind also die Dreieckungleichung erfüllende ganze Zahlen. Hieraus folgt, dass $x \geqq 2$, $y \geqq 3$, $z \geqq 4$.

Da eine innere Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der zwei anderen Seiten teilt, entsteht der minimale Umfang, wenn das kleinste gemeinsame Vielfache der vier Zahlen

$$u = x + y, \qquad v = x + z, \qquad w = y + z, \qquad t = x + y + z$$

seinen minimalen Wert annimmt.

Aus den obigen Minimalwerten für x, y, z folgt, dass

$$u \geqq 5, \qquad v \geqq 6, \qquad w \geqq 7, \qquad t = \frac{u + v + w}{2} \geqq 9$$

(es ist leicht einzusehen, dass auch u, v, w Dreieckseiten sein müssen).

1. x, y, z dürfen nicht alle drei gerade sein, da sie keinen gemeinsamen Teiler besitzen.

2. Es seien nun zwei der Zahlen x, y, z gerade. Dann sind t und zwei unter u, v, w ungerade.

a) Falls die beiden ungeraden Zahlen aus u, v, w Primzahlen sind, dann enthält t mindestens einen dritten ungeraden Primfaktor, da t kleiner ist als $2u$, $2v$ oder $2w$ und grösser als u, v oder w. Das kleinste gemeinsame Vielfache von u, v, w, t ist also mindestens $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

b) Falls eine der ungeraden Zahlen aus u, v, w zusammengesetzt ist, enthält entweder t oder die ungerade Primzahl einen dritten ungeraden Primfaktor – das kleinste gemeinsame Vielfache ist also mindestens $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

c) Falls beide ungeraden Zahlen aus u, v, w zusammengesetzt sind, so haben sie mindestens drei verschiedene ungerade Primfaktoren, das kleinste gemeinsame Vielfache ist also mindestens $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$.

3. Es seien nun zwei der Zahlen x, y, z ungerade. Dann sind unter u, v, w zwei verschiedene ungerade. Die gerade Zahl unter x, y, z muss wegen der Dreiecksungleichung die Differenz der zwei anderen ungeraden Zahlen übertreffen, sie ist also mindestens 4. Dann ist aber die kleinere ungerade Zahl unter u, v, w mindestens 7, und das kleinste gemeinsame Vielfache kann nicht kleiner als $2 \cdot 7 \cdot 9 = 126$ sein.

4. Es seien nun x, y, z alle ungerade. Dann sind u, v, w gerade, t ungerade und $8 \leqq u < v < w$.

a) Wenn u, v, w nicht durch 4 teilbar sind, enthält jede mindestens einen, die drei Zahlen also drei verschiedene ungerade Faktoren, die 3 übertreffen müssen. Das kleinste gemeinsame Vielfache beträgt also mindestens $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 630$.

b) Nur eine einzige Zahl unter u, v, w kann nicht durch 4 teilbar sein, sonst wäre t gerade.

c) Es seien also zwei unter u, v, w durch 4 teilbar, dann müssen sie insgesamt noch drei verschiedene Primfaktoren haben – das kleinste gemeinsame Vielfache ist also mindestens $2^2(2 \cdot 3 \cdot 5) = 120$.

Hieraus ergeben sich als minimale Werte:

$$u = 2^3 = 8, \quad v = 2 \cdot 5 = 10, \quad w = 2^2 \cdot 3 = 12, \quad t = 3 \cdot 5 = 15,$$

daraus

$$x = 3, \quad y = 5, \quad z = 7,$$

und die gesuchten minimalen Masszahlen sind:

$$a = 24, \quad b = 40, \quad c = 56.$$

Der Umfang ist $2s = 120$, und die Teilstrecken auf den Seiten sind:

$$a_1 = 14, \quad a_2 = 10, \quad b_1 = 12, \quad b_2 = 28, \quad c_1 = 35, \quad c_2 = 21.$$

J. SCHOPP, Budapest

Aufgabe 304. Man zeige: Sind a, b, c, d natürliche Zahlen, die der Bedingung $ab = cd$ genügen, dann ist

$$a = (a, c) \cdot (a, d) : (a, b, c, d).$$

R. LAUFFER, Graz

1. Lösung: Vu qu'on a les égalités

$$x(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x y_1, x y_2, \ldots, x y_n) \quad \text{et} \quad (x, y, z) = ((x, y), z),$$

on a

$$a(a, b, c, d) = (a^2, ab, ac, ad) = (a^2, cd, ac, ad) = ((a^2, ad), (ac, cd))$$

$$= (a(a, d), c(a, d)) = (a, c)\,(a, d),$$

d'où

$$a = (a, c) \cdot (a, d) : (a, b, c, d),$$

ce qu'il fallait démontrer. ANDRÉ MAKOWSKI, Varsovie

2. Lösung: Put $a = \Pi p^\alpha$, $b = \Pi p^\beta$, $c = \Pi p^\gamma$, $d = \Pi p^\delta$, so that $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. Then we wish to show that

$$\alpha = \min(\alpha, \gamma) + \min(\alpha, \delta) - \min(\alpha, \beta, \gamma, \delta). \tag{*}$$

We may have one of the following cases.

$$\begin{array}{lll} 1. & \alpha \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \beta, & \alpha \leqq \delta \leqq \gamma \leqq \beta, \\ 2. & \beta \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \alpha, & \beta \leqq \delta \leqq \gamma \leqq \alpha, \\ 3. & \gamma \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \delta, & \delta \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \gamma, \\ 4. & \gamma \leqq \beta \leqq \alpha \leqq \delta, & \delta \leqq \beta \leqq \alpha \leqq \gamma. \end{array}$$

It is easily verified that in each case (*) holds.

L. CARLITZ, Durham, N.C. (USA), A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Weitere Lösungen sandten F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), J. G. OBÁDOVICS (Miskolc, Ungarn), I. PAASCHE (München), J. POGÁNY (Budapest), G. RÉVÉSZ (Budapest), J. SCHOPP (Budapest).

Neue Aufgaben

341. Man beweise die folgende Variante zum Hellyschen Satz:

Lassen sich in jeder unendlichen Teilmenge einer abzählbar unendlichen Eikörpermenge M des k-dimensionalen euklidischen Raumes $k+1$ Eikörper mit nichtleerem Durchschnitt aufweisen, so enthält die Menge M unendlich viele Eikörper mit nichtleerem gemeinsamem Durchschnitt. H. HADWIGER, Bern

342. Die Kanten eines rechtwinkligen Dreikantes haben gemeinsame Punkte mit einer gegebenen Kreislinie K vom Radius r. Bestimme den geometrischen Ort der Dreikantspitze M.

J. ERDÖSI, Budapest

343. Gegeben ist eine Kreislinie k mit dem Radius r. Gesucht wird der geometrische Ort der vierten Ecke derjenigen gleichflächigen Tetraeder, deren drei andere Ecken auf k liegen.

J. SCHOPP, Budapest

344. Sind

$$N \geqq 4, \qquad a \leqq [N^{1/2}] - 1, \qquad n = \left[\frac{N}{a+1}\right]$$

natürliche Zahlen, so gelten die n Kongruenzen

$$\binom{N - a\,i}{i} \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} N - a\,i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dann und nur dann, wenn N eine Primzahl ist.

G. BERGER, Zürich

345. Man zeige, dass für zwei natürliche Zahlen m und n die Beziehung

$$\sum_{\substack{\mu=0\\ \nu=0}}^{n,\,m} (-1)^{\mu+\nu} \binom{n}{n-\nu} \binom{m}{m-\mu} \binom{\mu+\nu}{\nu} = \delta_{nm}$$

gilt, wo

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 \text{ für } n = m \\ 0 \text{ für } n \neq m. \end{cases}$$

H. MEILI, Winterthur

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC mit den üblichen Bezeichnungen der übrigen Stücke ist das Höhenfusspunktsdreieck UVW mit den Seiten u, v, w gezeichnet. Zeige:

$$u = a\cos\alpha, \qquad v = b\cos\beta, \qquad w = c\cos\gamma.$$

2. Ist S der Umfang des Dreiecks ABC, Σ derjenige des Höhenfusspunktsdreiecks, so gilt

$$S : \Sigma = r : \varrho.$$

3. Mit denselben Bezeichnungen findet man

$$S \cdot \Sigma = 2\,(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a).$$

4. Ist F die Fläche des Dreiecks ABC, so gilt für die Fläche Φ des Höhenfusspunktsdreiecks

$$\Phi = 2\,F\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

5. Im Dreieck ABC sind die Höhenfusspunkte V und W fest, und der Winkel α ist konstant.
   a) Die Seite BC ist konstant und dreht sich um einen festen Punkt.
   b) Der Feuerbachsche Kreis von Dreieck ABC ist fest.
   c) Inkreiszentrum und Schwerpunkt des Dreiecks ABC beschreiben Kreise.