Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 6

Artikel: Einige Dreiecksungleichungen
Autor: Leuenberger, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19779

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 10. November 1958

Einige Dreiecksungleichungen[1])

Herrn Prof. Dr. A. Alder zum 60. Geburtstag

1. Hilfsbeziehungen

Ein Dreieck mit den Seiten a_i und den zugehörigen Höhen h_i ($i = 1, 2, 3$) habe den Inkreisradius ϱ. Dann gilt

Lemma 1: *Die Höhensumme eines Dreiecks ist mindestens so gross wie der neunfache Inkreisradius, das heisst*

$$9\,\varrho \leqq \sum_{i=1}^{3} h_i .$$

Das Gleichheitszeichen wird vom gleichseitigen Dreieck und nur von diesem beansprucht.

Beweis: Aus der bekannten Relation

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{\varrho},$$

welche aus $a_i h_i = 2F = 2\varrho s$ (F ist die Fläche, $2s$ der Umfang des Dreiecks) gefolgert werden kann, gewinnen wir

$$\sum_{i=1}^{3} h_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} = \sum_{i=1}^{3} h_i + \frac{1}{\varrho}.$$

Es gilt aber $x + 1/x \geqq 2$ für ein beliebiges positives x mit Gleichheit nur für $x = 1$. Somit ist

$$\sum_{i=1}^{3} h_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \geqq 6$$

oder wegen der letzten Gleichung

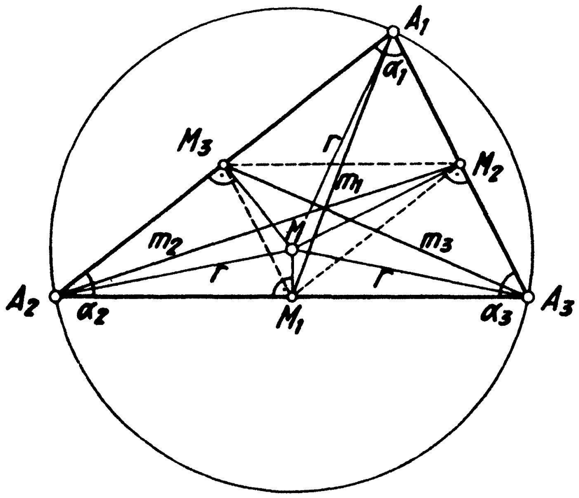
$$\sum_{i=1}^{3} h_i \geqq 6 - \frac{1}{\varrho}.$$

[1]) Zur vorliegenden Untersuchung wurde der Verfasser angeregt vom gleichlautenden Paragraphen in L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag 1953).

Gleichheit besteht, wenn $h_i \equiv 1$, das heisst für ein reguläres Dreieck mit dem Inkreisradius $\varrho = 1/3$. Mit andern Worten: Betrachten wir sämtliche Dreiecke mit diesem Inkreisradius, so gilt die Ungleichung $\sum_{i=1}^{3} h_i \geqq 3$. Zu jedem dieser Dreiecke gibt es ein ähnliches mit $\varrho = 1$. Da die Höhen jeweils mit 3 multipliziert werden, besteht für die Gesamtheit der Dreiecke mit der Einheit als Inkreisradius die Abschätzung $\sum_{i=1}^{3} h_i \geqq 9$. Misst schliesslich der Inkreisradius ϱ, so finden wir nach der gleichen Überlegung

$$\sum_{i=1}^{3} h_i \geqq 9\,\varrho\,,$$

wobei das Gleichheitszeichen in der Tat einzig für das gleichseitige Dreieck reserviert bleibt.



Figur 1

Ist m_i die Halbierende der Seite a_i und r der Umkreisradius, so wollen wir eine weitere Ungleichung festhalten in

Lemma 2: *Die doppelte Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks ist höchstens so gross wie der neunfache Umkreisradius oder*

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq \frac{9\,r}{2}\,.$$

Das Gleichheitszeichen greift für das gleichseitige Dreieck und nur für dieses Platz.

Beweis: a) für das spitzwinklige Dreieck:

Ist $A_2A_3 = a_1$, $A_3A_1 = a_2$ und $A_1A_2 = a_3$, so habe der Umkreismittelpunkt M den Abstand p_i von der Seite a_i. Es gilt

$$m_i \leqq r + p_i\,,$$

wie Figur 1 zeigt, und somit

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq 3\,r + \sum_{i=1}^{3} p_i\,.$$

Jetzt greifen wir auf den bekannten Satz zurück, dass die Summe der Abstände des Umkreismittelpunktes eines spitzwinkligen Dreiecks von den Seiten gleich der Summe von Um- und Inkreisradius ist:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = r + \varrho, \tag{*}$$

woraus folgt

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq 4\,r + \varrho.$$

Hier möchten wir nebenbei daran erinnern, dass

$$4\,r + \varrho = \sum_{i=1}^{3} \varrho_i$$

ist, wobei ϱ_i der Radius des die Seite a_i berührenden Ankreises ist. Da nun $\varrho \leqq r/2$, gilt wirklich die zu beweisende Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \leqq \frac{9\,r}{2}.$$

Dabei ist leicht einzusehen, dass das Gleichheitszeichen vom gleichseitigen Dreieck beansprucht wird.

Wir fügen noch bei, dass (*) etwa folgendermassen verifiziert werden kann: Nach PTOLEMÄUS ist im Sehnenviereck $M_1 A_3 M_2 M$

$$p_1 \frac{a_2}{2} + p_2 \frac{a_1}{2} = r \frac{a_3}{2}.$$

Zwei entsprechende Beziehungen lassen sich in den Vierecken $M_2 A_1 M_3 M$ und $M_3 A_2 M_1 M$ aufstellen. Fassen wir in diesen 3 Gleichungen p_i $(i = 1, 2, 3)$ als Unbekannte auf, so erhalten wir durch Auflösen

$$p_1 = r\,\frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2\,a_2\,a_3} = r \cos\alpha_1$$

und Analoges für p_2 und p_3. Hieraus ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = r \sum_{i=1}^{3} \cos\alpha_i.$$

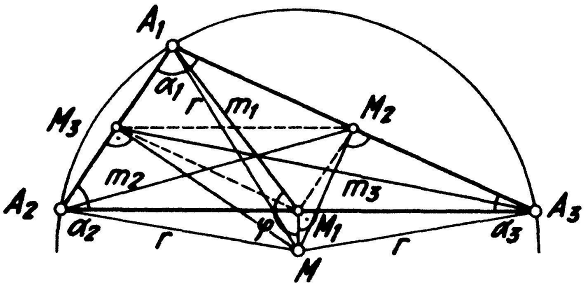
Daraus folgt aber (*) vermöge

$$\sum_{i=1}^{3} \cos\alpha_i = 1 + 4 \prod_{i=1}^{3} \sin\frac{\alpha_i}{2} \qquad \text{und} \qquad 4\,r \prod_{i=1}^{3} \sin\frac{\alpha_i}{2} = \varrho.$$

Lemma 2 gilt auch für das rechtwinklige Dreieck. Ist nämlich etwa $\alpha_1 = \pi/2$, so wird einfach $p_1 = 0$ und $m_1 = r$, was am gewünschten Schlussresultat nichts ändert.

b) Für das stumpfwinklige Dreieck.

Anders gestaltet sich die Lage, wenn $\alpha_1 > \pi/2$. Die obige Schlussmethode kann nicht übertragen werden, unter anderem deshalb, weil wir anstelle von (*) $p_2 + p_3 - p_1 = r + \varrho$ erhalten.



Figur 2

Der Beweis kann hier wie folgt geführt werden: Weil $\varphi > \pi/2$, ist $m_1 < r$. Zusätzlich entnehmen wir Figur 2

$$m_2 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} \qquad \text{und} \qquad m_3 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2},$$

so dass

$$\sum_{i=1}^{3} m_i < r + a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2}.$$

Da $a_1 < 2r$, stossen wir schliesslich auf die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{3} m_i < 3r + \frac{1}{2}(a_2 + a_3).$$

Wir wollen aber zeigen, dass $(a_2 + a_3)/2 < r\sqrt{2}$ ist und somit im stumpfwinkligen Dreieck

$$\sum_{i=1}^{3} m_i < \frac{9r}{2}$$

gilt: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, es sei $\alpha_2 \geqq \alpha_3$. Es gelte

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \omega \qquad \text{und} \qquad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \omega \qquad \text{mit} \qquad 0 \leqq \omega < \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Auf diese Weise ist

$$\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = \sin\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \omega\right) + \sin\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \omega\right) = 2\sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\cos\omega,$$

was durch Anwenden des Additionstheorems und Streichen der wegfallenden Glieder gewonnen wird. Der letzte Ausdruck wird in unserem Falle maximal, wenn $\omega = 0$ ist, das heisst aber

$$\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 \leqq 2\sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}.$$

Bedenken wir, dass

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{\pi}{4}$$

und damit

$$\sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

so finden wir $\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 < \sqrt{2}$. Unter Berücksichtigung von $(a_2 + a_3)/2 = r\,(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)$ erhalten wir das gewünschte Resultat

$$\frac{1}{2}\,(a_2 + a_3) < r\sqrt{2}.$$

Lemma 2 ist damit bewiesen.

2. Der zentrale Satz

Ist w_i die Halbierende des Winkels α_i, so gewinnen wir mit Lemma 1 und 2 ohne viel Umtriebe folgenden

Satz: *In einem beliebigen Dreieck gilt*

$$9\varrho \leqq \sum_{i=1}^{3} h_i \leqq \frac{9r}{2}.$$

Anstelle von $\sum_{i=1}^{3} h_i$ *darf* $\sum_{i=1}^{3} m_i$ *oder* $\sum_{i=1}^{3} w_i$ *gesetzt werden. Gleichheit herrscht in jedem Falle im regulären Dreieck und nur in diesem.*

Beweis: Offensichtlich ist $w_i \geqq h_i$ und ebenso $m_i \geqq h_i$. Damit ist dank Lemma 1 die Abschätzung nach unten durchgeführt.

Die letzte Ungleichung liefert uns unter Berücksichtigung von Lemma 2 ohne weiteres

$$\sum_{i=1}^{3} h_i \leqq \frac{9r}{2}$$

mit Gleichheit für das gleichseitige Dreieck. Schliesslich folgern wir etwa aus dem bekannten Satz der Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks $w_i \leqq m_i$, womit nochmals unter Heranziehung von Lemma 2 auch die Abschätzung nach oben vollzogen ist.

3. Anwendung

Der aufgestellte Satz ist fundamental, so dass er wohl ab und zu bei Anwendungen zur Sprache kommen kann. Wir begnügen uns vorläufig damit, deren zwei herauszugreifen.

Für

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i}$$

gilt die Abschätzung

$$\frac{9\varrho}{2F} \leqq \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{9r}{4F} \tag{1}$$

mit Gleichheit für das reguläre Dreieck. Es folgt nämlich aus $h_i = 2F/a_i$:

$$\sum_{i=1}^{3} h_i = 2F \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i},$$

und somit nach dem zentralen Satz

$$9\varrho \leqq 2F \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{9r}{2},$$

woraus wir nach Division durch $2F$ tatsächlich (1) erhalten.

Auf ebenso einfache Weise zeigen wir, dass für $i \neq j$ gilt

$$36\varrho^2 \leqq \sum_{i,j} a_i a_j \leqq 9r^2. \tag{2}$$

Setzen wir

$$F = \frac{\prod_{i=1}^{3} a_i}{4r}$$

in (1) ein und bringen wir zudem

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i}$$

auf den gemeinsamen Nenner $\prod_{i=1}^{3} a_i$, so stossen wir nach Multiplikation mit diesem Produkt auf

$$18r\varrho \leqq \sum_{i,j} a_i a_j \leqq 9r^2$$

und schliesslich auf (2) wegen $2\varrho \leqq r$. Diese letzte wohlbekannte Ungleichung liefert uns übrigens ohne Hilfe der in dieser Note hergeleiteten Resultate als Komplementarium zu (2)

$$\frac{1}{r^2} \leqq \sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} \leqq \frac{1}{4\varrho^2}; \tag{3}$$

dies auf folgende Weise: Setzen wir wie üblich

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i = s,$$

so gilt

$$\sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{\prod^{3} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{4rF} = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i}{4r\varrho s} = \frac{1}{2r\varrho}$$

und damit auch (3). Es ist leicht ersichtlich, dass sowohl in (2) als auch in (3) das Gleichheitszeichen im gleichseitigen Dreieck und nur dort realisiert wird.

F. LEUENBERGER, Zuoz