

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 13 (1958)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Einige Dreiecksungleichungen  
**Autor:** Leuenberger, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19779>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band XIII      Nr. 6      Seiten 121–144      Basel, 10. November 1958

---

## Einige Dreiecksungleichungen<sup>1)</sup>

Herrn Prof. Dr. A. ALDER zum 60. Geburtstag

### 1. Hilfsbeziehungen

Ein Dreieck mit den Seiten  $a_i$  und den zugehörigen Höhen  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) habe den Inkreisradius  $\varrho$ . Dann gilt

**Lemma 1:** *Die Höhensumme eines Dreiecks ist mindestens so gross wie der neunfache Inkreisradius, das heisst*

$$9 \varrho \leq \sum_{i=1}^3 h_i.$$

*Das Gleichheitszeichen wird vom gleichseitigen Dreieck und nur von diesem beansprucht.*

*Beweis:* Aus der bekannten Relation

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} = \frac{1}{\varrho},$$

welche aus  $a_i h_i = 2F = 2\varrho s$  ( $F$  ist die Fläche,  $2s$  der Umfang des Dreiecks) gefolgert werden kann, gewinnen wir

$$\sum_{i=1}^3 h_i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} = \sum_{i=1}^3 h_i + \frac{1}{\varrho}.$$

Es gilt aber  $x + 1/x \geq 2$  für ein beliebiges positives  $x$  mit Gleichheit nur für  $x = 1$ . Somit ist

$$\sum_{i=1}^3 h_i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \geq 6$$

oder wegen der letzten Gleichung

$$\sum_{i=1}^3 h_i \geq 6 - \frac{1}{\varrho}.$$

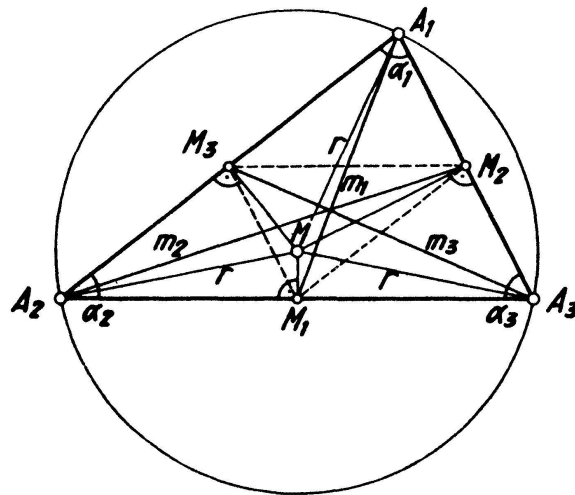
---

<sup>1)</sup> Zur vorliegenden Untersuchung wurde der Verfasser angeregt vom gleichlautenden Paragraphen in L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag 1953).

Gleichheit besteht, wenn  $h_i \equiv 1$ , das heisst für ein reguläres Dreieck mit dem Inkreisradius  $\rho = 1/3$ . Mit andern Worten: Betrachten wir sämtliche Dreiecke mit diesem Inkreisradius, so gilt die Ungleichung  $\sum_{i=1}^3 h_i \geq 3$ . Zu jedem dieser Dreiecke gibt es ein ähnliches mit  $\rho = 1$ . Da die Höhen jeweils mit 3 multipliziert werden, besteht für die Gesamtheit der Dreiecke mit der Einheit als Inkreisradius die Abschätzung  $\sum_{i=1}^3 h_i \geq 9$ . Misst schliesslich der Inkreisradius  $\rho$ , so finden wir nach der gleichen Überlegung

$$\sum_{i=1}^3 h_i \geq 9 \rho,$$

wobei das Gleichheitszeichen in der Tat einzig für das gleichseitige Dreieck reserviert bleibt.



Figur 1

Ist  $m_i$  die Halbierende der Seite  $a_i$  und  $r$  der Umkreisradius, so wollen wir eine weitere Ungleichung festhalten in

**Lemma 2:** Die doppelte Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks ist höchstens so gross wie der neunfache Umkreisradius oder

$$\sum_{i=1}^3 m_i \leq \frac{9r}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen greift für das gleichseitige Dreieck und nur für dieses Platz.

*Beweis:* a) für das spitzwinklige Dreieck:

Ist  $A_2A_3 = a_1$ ,  $A_3A_1 = a_2$  und  $A_1A_2 = a_3$ , so habe der Umkreismittelpunkt  $M$  den Abstand  $p_i$  von der Seite  $a_i$ . Es gilt

$$m_i \leq r + p_i,$$

wie Figur 1 zeigt, und somit

$$\sum_{i=1}^3 m_i \leq 3r + \sum_{i=1}^3 p_i.$$

Jetzt greifen wir auf den bekannten Satz zurück, dass die Summe der Abstände des Umkreismittelpunktes eines spitzwinkligen Dreiecks von den Seiten gleich der Summe von Um- und Inkreisradius ist:

$$\sum_{i=1}^3 p_i = r + \varrho, \quad (*)$$

woraus folgt

$$\sum_{i=1}^3 m_i \leq 4r + \varrho.$$

Hier möchten wir nebenbei daran erinnern, dass

$$4r + \varrho = \sum_{i=1}^3 \varrho_i$$

ist, wobei  $\varrho_i$  der Radius des die Seite  $a_i$  berührenden Ankreises ist. Da nun  $\varrho \leq r/2$ , gilt wirklich die zu beweisende Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 m_i \leq \frac{9r}{2}.$$

Dabei ist leicht einzusehen, dass das Gleichheitszeichen vom gleichseitigen Dreieck beansprucht wird.

Wir fügen noch bei, dass (\*) etwa folgendermassen verifiziert werden kann: Nach PTOLEMÄUS ist im Sehnenviereck  $M_1A_3M_2M$

$$p_1 \frac{a_2}{2} + p_2 \frac{a_1}{2} = r \frac{a_3}{2}.$$

Zwei entsprechende Beziehungen lassen sich in den Vierecken  $M_2A_1M_3M$  und  $M_3A_2M_1M$  aufstellen. Fassen wir in diesen 3 Gleichungen  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) als Unbekannte auf, so erhalten wir durch Auflösen

$$p_1 = r \frac{a_2^2 + a_3^2 - a_1^2}{2 a_2 a_3} = r \cos \alpha_1$$

und Analoges für  $p_2$  und  $p_3$ . Hieraus ergibt sich

$$\sum_{i=1}^3 p_i = r \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i.$$

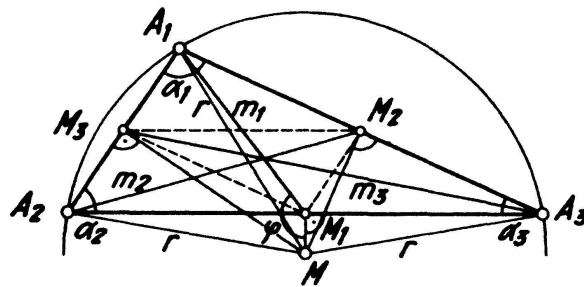
Daraus folgt aber (\*) vermöge

$$\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i = 1 + 4 \prod_{i=1}^3 \sin \frac{\alpha_i}{2} \quad \text{und} \quad 4r \prod_{i=1}^3 \sin \frac{\alpha_i}{2} = \varrho.$$

Lemma 2 gilt auch für das rechtwinklige Dreieck. Ist nämlich etwa  $\alpha_1 = \pi/2$ , so wird einfach  $p_1 = 0$  und  $m_1 = r$ , was am gewünschten Schlussresultat nichts ändert.

b) Für das stumpfwinklige Dreieck.

Anders gestaltet sich die Lage, wenn  $\alpha_1 > \pi/2$ . Die obige Schlussmethode kann nicht übertragen werden, unter anderem deshalb, weil wir anstelle von (\*)  $\phi_2 + \phi_3 - \phi_1 = r + \rho$  erhalten.



Figur 2

Der Beweis kann hier wie folgt geführt werden: Weil  $\varphi > \pi/2$ , ist  $m_1 < r$ . Zusätzlich entnehmen wir Figur 2

$$m_2 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_3}{2} \quad \text{und} \quad m_3 < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2},$$

so dass

$$\sum_{i=1}^3 m_i < r + a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2}.$$

Da  $a_1 < 2r$ , stossen wir schliesslich auf die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 m_i < 3r + \frac{1}{2}(a_2 + a_3).$$

Wir wollen aber zeigen, dass  $(a_2 + a_3)/2 < r\sqrt{2}$  ist und somit im stumpfwinkligen Dreieck

$$\sum_{i=1}^3 m_i < \frac{9r}{2}$$

gilt: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, es sei  $\alpha_2 \geq \alpha_3$ . Es gelte

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \omega \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \omega \quad \text{mit} \quad 0 \leq \omega < \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{\pi}{4}.$$

Auf diese Weise ist

$$\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 = \sin \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \omega \right) + \sin \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \omega \right) = 2 \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \cos \omega,$$

was durch Anwenden des Additionstheorems und Streichen der wegfallenden Glieder gewonnen wird. Der letzte Ausdruck wird in unserem Falle maximal, wenn  $\omega = 0$  ist, das heisst aber

$$\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 \leq 2 \sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}.$$

Bedenken wir, dass

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{\pi}{4}$$

und damit

$$\sin \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} < \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

so finden wir  $\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3 < \sqrt{2}$ . Unter Berücksichtigung von  $(a_2 + a_3)/2 = r (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_3)$  erhalten wir das gewünschte Resultat

$$\frac{1}{2} (a_2 + a_3) < r \sqrt{2}.$$

Lemma 2 ist damit bewiesen.

## 2. Der zentrale Satz

Ist  $w_i$  die Halbierende des Winkels  $\alpha_i$ , so gewinnen wir mit Lemma 1 und 2 ohne viel Umtriebe folgenden

**Satz:** *In einem beliebigen Dreieck gilt*

$$9 \varrho \leq \sum_{i=1}^3 h_i \leq \frac{9r}{2}.$$

*Anstelle von  $\sum_{i=1}^3 h_i$  darf  $\sum_{i=1}^3 m_i$  oder  $\sum_{i=1}^3 w_i$  gesetzt werden. Gleichheit herrscht in jedem Falle im regulären Dreieck und nur in diesem.*

*Beweis:* Offensichtlich ist  $w_i \geq h_i$  und ebenso  $m_i \geq h_i$ . Damit ist dank Lemma 1 die Abschätzung nach unten durchgeführt.

Die letzte Ungleichung liefert uns unter Berücksichtigung von Lemma 2 ohne weiteres

$$\sum_{i=1}^3 h_i \leq \frac{9r}{2}$$

mit Gleichheit für das gleichseitige Dreieck. Schliesslich folgern wir etwa aus dem bekannten Satz der Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks  $w_i \leq m_i$ , womit nochmals unter Heranziehung von Lemma 2 auch die Abschätzung nach oben vollzogen ist.

## 3. Anwendung

Der aufgestellte Satz ist fundamental, so dass er wohl ab und zu bei Anwendungen zur Sprache kommen kann. Wir begnügen uns vorläufig damit, deren zwei herauszugreifen.

Für

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i}$$

gilt die Abschätzung

$$\frac{9\varrho}{2F} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leq \frac{9r}{4F} \quad (1)$$

mit Gleichheit für das reguläre Dreieck. Es folgt nämlich aus  $h_i = 2F/a_i$ :

$$\sum_{i=1}^3 h_i = 2F \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i},$$

und somit nach dem zentralen Satz

$$9\rho \leq 2F \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leq \frac{9r}{2},$$

woraus wir nach Division durch  $2F$  tatsächlich (1) erhalten.

Auf ebenso einfache Weise zeigen wir, dass für  $i \neq j$  gilt

$$36\rho^2 \leq \sum_{i,j} a_i a_j \leq 9r^2. \quad (2)$$

Setzen wir

$$F = \frac{\prod_{i=1}^3 a_i}{4r}$$

in (1) ein und bringen wir zudem

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i}$$

auf den gemeinsamen Nenner  $\prod_{i=1}^3 a_i$ , so stoßen wir nach Multiplikation mit diesem Produkt auf

$$18r\rho \leq \sum_{i,j} a_i a_j \leq 9r^2$$

und schliesslich auf (2) wegen  $2\rho \leq r$ . Diese letzte wohlbekanntete Ungleichung liefert uns übrigens ohne Hilfe der in dieser Note hergeleiteten Resultate als Komplementarium zu (2)

$$\frac{1}{r^2} \leq \sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} \leq \frac{1}{4\rho^2}; \quad (3)$$

dies auf folgende Weise: Setzen wir wie üblich

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i = s,$$

so gilt

$$\sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{\prod_{i=1}^3 a_i} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{4rF} = \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{4r\rho s} = \frac{1}{2r\rho}$$

und damit auch (3). Es ist leicht ersichtlich, dass sowohl in (2) als auch in (3) das Gleichheitszeichen im gleichseitigen Dreieck und nur dort realisiert wird.

F. LEUENBERGER, Zuoz