ten, dass B_n je ein Glied mit der Periode 2 und der Periode 5 enthalten muss; $(-1)^n$ hat die Periode 2, $\Omega(n)$ die Periode 5. SYLVESTER hat für diese periodischen Anteile den Begriff *Wellenfunktion* geprägt.

Nach (5) ist nun etwa

$$A_{100} = \sum_{k=0}^{10} B_k\, B_{100-10k}.$$

Berechnet man die hierin vorkommenden B_k auf Grund von (12), so findet man

$$A_{100} = 1 \cdot 541 + 1 \cdot 442 + 2 \cdot 353 + 2 \cdot 274 + 3 \cdot 205 + 4 \cdot 146$$
$$+ 5 \cdot 97 + 6 \cdot 58 + 7 \cdot 29 + 8 \cdot 10 + 10 \cdot 1 = 4562$$

in Übereinstimmung mit dem in (2) angegebenen Wert.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Opera omnia, series I, volumen VIII (Leipzig-Berlin 1922), speziell Kap. 16, *De partitione numerorum*, S. 313–338.
[2] G. POLYA und G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band I (Berlin 1925).
[3] E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik*, 2. Aufl. (Leipzig-Berlin 1927).
[4] P. A. MAC MAHON, *Combinatory Analysis*, Proc. Lond. Math. Soc. *28*, 5–12 (1897).
[5] J. J. SYLVESTER, *The Partitions of Numbers*, Proc. Lond. Math. Soc. *28*, 33–96 (1897).
[6] W. AHRENS: *Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik* (Berlin 1918), S. 34–40.
[7] P. VON SCHAEWEN, *Bericht über ein Preisausschreiben*, Z. math. naturw. Unterricht *42*, 192–195 (1911).
[8] L. BIEBERBACH, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Bd. 1, 4. Aufl. (Leipzig 1934), S. 177.
[9] G. POLYA, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta math. *68*, 145–253 (1937).

M. JEGER, Luzern

Ungelöste Probleme

Nr. 25. Eine euklidische Punktmenge A weist die Dreipunktkonvexitätseigenschaft auf, wenn A mit drei Punkten $P, Q, R \in A$ stets wenigstens eine der drei Verbindungsstrecken QR, RP, PQ ganz enthält. Diese schwächere Variante zu der üblichen Konvexitätsbedingung wurde von F. A. VALENTINE[1]) eingehend untersucht. Es ist naheliegend, eine erschöpfende direkte Charakterisierung derjenigen Punktmengen zu suchen, welche die erwähnte Dreipunktforderung erfüllen. Diese Aufgabe – übrigens eine typische Fragestellung kombinatorisch-geometrischer Art – ist aber anscheinend nicht leicht zu lösen. Lediglich für ebene Punktmengen kann eine Antwort gegeben werden.

F. A. VALENTINE bewies die folgende Aussage: *Eine abgeschlossene Punktmenge A der euklidischen Ebene mit der Dreipunktkonvexitätseigenschaft lässt sich als Vereini-*

[1]) F. A. VALENTINE, *A Three Point Convexity Property*, Pacific J. Math. *7*, 1227–1235 (1957).

gungsmenge von $n \leqq 3$ abgeschlossenen und konvexen Punktmengen darstellen; die Zahl 3 kann nicht durch eine kleinere ersetzt werden.

Mühelos kann man schliessen, dass sich A in $n = 2$ abgeschlossene, konvexe und disjunkte Teilmengen zerlegen lässt, wenn A nicht zusammenhängend ist. Ein nicht triviales Problem liegt lediglich dann vor, wenn A zusammenhängend ist.

Es ist unseres Wissens nicht geglückt, einen analogen Satz für räumliche Punktmengen zu finden. Nachdem auch der Unterzeichnete vergeblich versuchte, die Frage abzuklären, soll diese in unserer Rubrik Aufnahme finden: Das Problem lautet: *Gibt es ein räumliches Analogon zum Valentinschen Satz über ebene abgeschlossene Punktmengen mit der Dreipunktkonvexitätseigenschaft?* H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Bemerkung zu der Arbeit von Herrn G. Kirschmer «Über eine mit den Pythagoräischen Zahlen zusammenhängende Gruppe»[1])

Durch eine Abänderung der von Herrn G. KIRSCHMER gewählten Normierung kann man den Aufbau der Gruppe besonders durchsichtig machen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ enthalte die Elemente $G = (a|b; c)$, wobei die Bedingungen $c^2 = a^2 + b^2$; a, b, c reell; $c > 0$ erfüllt sein sollen. Die Verknüpfungsvorschrift wird nachher angegeben werden.

Wir führen noch die komplexe Zahl $\alpha = a + i\,b$ ein. Dann ist $|\alpha| = c$. Die Bedingung $c > 0$ ist gleichbedeutend mit $\alpha \neq 0$.

Wir fassen nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ins Auge, die die Elemente $\overline{G} = (\alpha; |\alpha|)$ enthält. Als Verknüpfungsvorschrift bietet sich von selbst dar

$$\overline{G}_1 \circ \overline{G}_2 = (\alpha_1\,\alpha_2;\,|\alpha_1\,\alpha_2|). \tag{1}$$

Wie man sieht, ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine zur multiplikativen Gruppe des Körpers der komplexen Zahlen isomorphe Gruppe.

Da die Beziehung

$$\alpha_1\,\alpha_2 = (a_1\,a_2 - b_1\,b_2) + i\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1) \tag{2}$$

gilt, so wird $\mathfrak{G}$ eine zu $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorphe Gruppe, wenn man setzt

$$G_1 \circ G_2 = ((a_1\,a_2 - b_1\,b_2)\,|\,(a_1\,b_2 + a_2\,b_1);\,c_1\,c_2). \tag{3}$$

Eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{Gauss}$ von $\mathfrak{G}$ erhält man, wenn man a und b auf rationale Zahlen beschränkt; $\mathfrak{G}_{Gauss}$ ist isomorph der multiplikativen Gruppe des Körpers, den man aus dem Körper der rationalen Zahlen durch Adjunktion von i gewinnt.

Verlangt man auch noch, dass c rational ausfällt, so entsteht eine Untergruppe $\mathfrak{G}_{Pyth.}$ von $\mathfrak{G}_{Gauss}$. Diese Untergruppe hat in arithmetischer (zahlentheoretischer) Hinsicht einiges Interesse.

Wir führen ein Beispiel an:

$$(3|4;\,5) \circ (5|12;\,13) = (-33|56;\,65). \tag{4}$$

Es ist leicht zu sehen, wie der bei $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{G}$ angegebene Aufbau zu modifizieren ist, wenn man statt vom Körper der reellen Zahlen vom Schiefkörper der Quaternionen ausgeht; man erhält dann natürlich eine nicht kommutative Gruppe.

---

[1]) El. Math. *12*, 49ff. (1957).