Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 4

Rubrik: Ungelöste Probleme

und daraus

$$a_{11} = -a_{22} \quad \text{und} \quad a_{21} = a_{12} .$$

Diese beiden Beziehungen zwischen den Koeffizienten hätten an die Stelle der durch (12) ausgedrückten Relationen zu treten.

Ansonsten würde die Durchführung der Aufgabe völlig analog jener verlaufen, die sich bei gleichsinniger Kongruenz der beiden Strahlenbüschel ergibt.

L. HOFMANN, Wien

Ungelöste Probleme

Nr. 24. P. ERDÖS hat gelegentlich die Frage aufgeworfen, ob eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge existiert, für die je zwei Punkte eine rationale Distanz aufweisen. Dass es auf der Geraden dicht liegende Punktmengen dieser Eigenschaft gibt, ist trivial; es genügt, die Menge der Punkte zu bilden, die von einem fest gewählten Punkt der Geraden rationale Entfernungen besitzen.

Weniger plausibel und interessant ist die Tatsache, dass es möglich ist, auf der Kreislinie abzählbar-unendlich viele Punkte überall dicht so zu verteilen, dass alle Distanzen rational ausfallen. Anschliessend an eine Fragestellung von E. TROST[1]) hat A. MÜLLER[2]) ein einfaches Verfahren angegeben, das auch die Konstruktion einer derartigen Punktmenge auf der Kreislinie erlaubt. In der Tat: Man wähle den Winkel φ so, dass $\cos\varphi = 4/5$ und $\sin\varphi = 3/5$ wird. Es ist dann φ mit π inkommensurabel, so dass φ/π irrational ausfällt. Die abzählbar-unendlich vielen Punkte P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Ebene mit den Polarkoordinaten $r_n = 1$; $\theta_n = 2\,n\,\varphi$ liegen auf der Peripherie des Einheitskreises um den Ursprung überall dicht und sind dort sogar gleichverteilt. Für die euklidische Distanz $D = D(P_n, P_m)$ zweier Punkte P_n und P_m resultiert $D = 2\,|\sin(n-m)\,\varphi|$ und, wie man mit Verwendung der geläufigen trigonometrischen Formeln leicht bestätigt, D wird rational. – Auf die eingangs erwähnte Frage zurückkommend, müssen wir einräumen, dass es recht schwer fällt, an die Existenz einer in der ganzen Ebene dicht liegenden Punktmenge der betrachteten Eigenschaft zu glauben, jedoch wird man nach den vielen Erfahrungen mit «Paradoxien» der Punktmengenlehre auch zur Vorsicht neigen. Unser Problem: Gibt es eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge, deren Punktepaare alle rationale Distanzen aufweisen?

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 12. J. J. SCHÄFFER (Montevideo) teilte uns eine einfache Konstruktion[3]) mit, die zeigt, dass das reguläre n-Eck sicher nicht den grösstmöglichen Flächeninhalt unter allen konvexen n-Ecken gleichen Durchmessers aufweist, falls

---

[1]) E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, 59 (1951).

[2]) A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. *8*, 37–38 (1953). Weitere Beiträge zu dieser Frage lieferten M. ALTWEGG [El. Math. *7*, 56–58 (1952)] und F. STEIGER [El. Math. *8*, 66–67 (1953)].

[3]) Brief vom 13. Januar 1957 an den Unterzeichneten.

$n > 4$ und n gerade ist. In der Tat: Es sei $n = 2m > 4$,

$$z_k = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_k u\right) e^{k\pi i/m} \quad \left(i = \sqrt{-1},\ k = 1, \ldots, 2m\right),$$

$$u \geqq 0, \quad \varepsilon_k = 1 \ (k = 1, \ldots, m), \quad \varepsilon_k = -1 \ (k = m+1, \ldots, 2m).$$

Deutet man die komplexen Zahlen z_k als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, so erzeugen diese für $u = 0$ ein reguläres $2m$-Eck vom Durchmesser 1. Aus Stetigkeitsgründen bleibt das $2m$-Eck für ausreichend kleine $u \geqq 0$ konvex und, wie man mühelos bestätigt, bleibt $|z_p - z_q| \leqq 1$ $(p, q = 1, \ldots, 2m)$, so dass der Durchmesser 1 bleibt. Für den Flächeninhalt des erzeugten konvexen $2m$-Ecks ergibt sich dagegen

$$F = \left\{\frac{m}{4} + (m-2)\,u^2\right\} \sin\frac{\pi}{m},$$

so dass abgelesen werden kann, dass wegen $m > 2$ für zulässige $u > 0$ ein grösserer Wert resultiert als für $u = 0$, der dem regulären $2m$-Eck gleichen Durchmessers entspricht. Im Falle $m = 2$ ist F von u unabhängig, was mit der bekannten elementaren Tatsache zusammenhängt, dass das Quadrat nicht das einzige flächengrösste Viereck festen Durchmessers ist.

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 21. Von J. J. SCHÄFFER (Montevideo) wurde uns mitgeteilt[4]), dass G. LUMER (Chicago) in einer kürzlich veröffentlichten Note[5]), die uns vom Verfasser auch zugestellt worden ist, die folgenden Ergebnisse erzielte:

1. Wenn ein Polygon in einer Eilinie umgewendet werden kann, so ist dieses einem Kreis einbeschrieben.

2. Jedes reguläre Polygon lässt sich in unendlich vielen verschiedenen Eilinien umwenden. Unter diesen Eilinien gibt es solche, deren Flächeninhalt grösser, und andere, deren Flächeninhalt kleiner ist als derjenige des Umkreises des Polygons.

H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 292. Sur un diamètre AB d'un cercle (O), on marque un point C, entre A et B, et l'on décrit sur CB le demi-cercle (O'), au-dessus de AB, puis les cercles (ω_1), $(\omega_2), \ldots, (\omega_n)$ tangents au demi-cercle (O), à la demi-corde CD perpendiculaire à AB et, de proche en proche, aux cercles (O'), (ω_1), $(\omega_2), \ldots, (\omega_{n-1})$, au-dessus de AB. Exprimer le rayon r_n du cercle (ω_n), d'indice donné n. Pour quelle position de C sur AB le cercle (ω_3), d'indice 3, est-il le plus grand? V. THÉBAULT, Tennie (Sarthe, France)

Solution: Soit $\overline{CB} < \overline{AC}$. Désignons par $x = \overline{O'B}$ le rayon du cercle (O') et par y_n l'ordonnée de ω_n. Le lieu géométrique des centres ω_n est la parabole

$$y_n^2 = 4\,(R - x)\,(x - r_n)$$

de foyer O, de sommet O' et de paramètre $p = 2\,(R - x)$. La condition de tangence des cercles (ω_n) et (ω_{n-1}) est

$$(y_n - y_{n-1})^2 = 4\,r_{n-1}\,r_n.$$

---

[4]) Brief vom 5. März 1958 an den Unterzeichneten.

[5]) G. LUMER, *Poligonos inscriptibles en curvas convexas*, Rev. Un. mat. argent. *17*, 97–102 (1955).