Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 4

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

und daraus

$$a_{11} = -a_{22} \quad \text{und} \quad a_{21} = a_{12}\,.$$

Diese beiden Beziehungen zwischen den Koeffizienten hätten an die Stelle der durch (12) ausgedrückten Relationen zu treten.

Ansonsten würde die Durchführung der Aufgabe völlig analog jener verlaufen, die sich bei gleichsinniger Kongruenz der beiden Strahlenbüschel ergibt.

L. HOFMANN, Wien

Ungelöste Probleme

Nr. 24. P. ERDÖS hat gelegentlich die Frage aufgeworfen, ob eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge existiert, für die je zwei Punkte eine rationale Distanz aufweisen. Dass es auf der Geraden dicht liegende Punktmengen dieser Eigenschaft gibt, ist trivial; es genügt, die Menge der Punkte zu bilden, die von einem fest gewählten Punkt der Geraden rationale Entfernungen besitzen.

Weniger plausibel und interessant ist die Tatsache, dass es möglich ist, auf der Kreislinie abzählbar-unendlich viele Punkte überall dicht so zu verteilen, dass alle Distanzen rational ausfallen. Anschliessend an eine Fragestellung von E. TROST[1]) hat A. MÜLLER[2]) ein einfaches Verfahren angegeben, das auch die Konstruktion einer derartigen Punktmenge auf der Kreislinie erlaubt. In der Tat: Man wähle den Winkel φ so, dass $\cos\varphi = 4/5$ und $\sin\varphi = 3/5$ wird. Es ist dann φ mit π inkommensurabel, so dass φ/π irrational ausfällt. Die abzählbar-unendlich vielen Punkte P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Ebene mit den Polarkoordinaten $r_n = 1$; $\theta_n = 2\,n\,\varphi$ liegen auf der Peripherie des Einheitskreises um den Ursprung überall dicht und sind dort sogar gleichverteilt. Für die euklidische Distanz $D = D(P_n, P_m)$ zweier Punkte P_n und P_m resultiert $D = 2\,|\sin(n-m)\,\varphi|$ und, wie man mit Verwendung der geläufigen trigonometrischen Formeln leicht bestätigt, D wird rational. – Auf die eingangs erwähnte Frage zurückkommend, müssen wir einräumen, dass es recht schwer fällt, an die Existenz einer in der ganzen Ebene dicht liegenden Punktmenge der betrachteten Eigenschaft zu glauben, jedoch wird man nach den vielen Erfahrungen mit «Paradoxien» der Punktmengenlehre auch zur Vorsicht neigen. Unser Problem: Gibt es eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge, deren Punktepaare alle rationale Distanzen aufweisen?

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 12. J. J. SCHÄFFER (Montevideo) teilte uns eine einfache Konstruktion[3]) mit, die zeigt, dass das reguläre n-Eck sicher nicht den grösstmöglichen Flächeninhalt unter allen konvexen n-Ecken gleichen Durchmessers aufweist, falls

[1]) E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, 59 (1951).

[2]) A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. *8*, 37–38 (1953). Weitere Beiträge zu dieser Frage lieferten M. ALTWEGG [El. Math. *7*, 56–58 (1952)] und F. STEIGER [El. Math. *8*, 66–67 (1953)].

[3]) Brief vom 13. Januar 1957 an den Unterzeichneten.

$n > 4$ und n gerade ist. In der Tat: Es sei $n = 2m > 4$,

$$z_k = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_k u\right) e^{k\pi i/m} \qquad \left(i = \sqrt{-1},\ k = 1, \ldots, 2m\right),$$

$$u \geqq 0, \qquad \varepsilon_k = 1 \ (k = 1, \ldots, m), \qquad \varepsilon_k = -1 \ (k = m+1, \ldots, 2m).$$

Deutet man die komplexen Zahlen z_k als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, so erzeugen diese für $u = 0$ ein reguläres $2m$-Eck vom Durchmesser 1. Aus Stetigkeitsgründen bleibt das $2m$-Eck für ausreichend kleine $u \geqq 0$ konvex und, wie man mühelos bestätigt, bleibt $|z_p - z_q| \leqq 1$ $(p, q = 1, \ldots, 2m)$, so dass der Durchmesser 1 bleibt. Für den Flächeninhalt des erzeugten konvexen $2m$-Ecks ergibt sich dagegen

$$F = \left\{\frac{m}{4} + (m-2)\, u^2\right\} \sin\frac{\pi}{m},$$

so dass abgelesen werden kann, dass wegen $m > 2$ für zulässige $u > 0$ ein grösserer Wert resultiert als für $u = 0$, der dem regulären $2m$-Eck gleichen Durchmessers entspricht. Im Falle $m = 2$ ist F von u unabhängig, was mit der bekannten elementaren Tatsache zusammenhängt, dass das Quadrat nicht das einzige flächengrösste Viereck festen Durchmessers ist. H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 21. Von J. J. SCHÄFFER (Montevideo) wurde uns mitgeteilt[4]), dass G. LUMER (Chicago) in einer kürzlich veröffentlichten Note[5]), die uns vom Verfasser auch zugestellt worden ist, die folgenden Ergebnisse erzielte:

1. Wenn ein Polygon in einer Eilinie umgewendet werden kann, so ist dieses einem Kreis einbeschrieben.

2. Jedes reguläre Polygon lässt sich in unendlich vielen verschiedenen Eilinien umwenden. Unter diesen Eilinien gibt es solche, deren Flächeninhalt grösser, und andere, deren Flächeninhalt kleiner ist als derjenige des Umkreises des Polygons.

H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 292. Sur un diamètre AB d'un cercle (O), on marque un point C, entre A et B, et l'on décrit sur CB le demi-cercle (O'), au-dessus de AB, puis les cercles (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n) tangents au demi-cercle (O), à la demi-corde CD perpendiculaire à AB et, de proche en proche, aux cercles (O'), (ω_1), (ω_2), ..., (ω_{n-1}), au-dessus de AB. Exprimer le rayon r_n du cercle (ω_n), d'indice donné n. Pour quelle position de C sur AB le cercle (ω_3), d'indice 3, est-il le plus grand? V. THÉBAULT, Tennie (Sarthe, France)

Solution: Soit $\overline{CB} < \overline{AC}$. Désignons par $x = \overline{O'B}$ le rayon du cercle (O') et par y_n l'ordonnée de ω_n. Le lieu géométrique des centres ω_n est la parabole

$$y_n^2 = 4\,(R - x)\,(x - r_n)$$

de foyer O, de sommet O' et de paramètre $p = 2\,(R - x)$. La condition de tangence des cercles (ω_n) et (ω_{n-1}) est

$$(y_n - y_{n-1})^2 = 4\, r_{n-1}\, r_n.$$

---

[4]) Brief vom 5. März 1958 an den Unterzeichneten.

[5]) G. LUMER, *Poligonos inscriptibles en curvas convexas*, Rev. Un. mat. argent. *17*, 97–102 (1955).