Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1958)

Heft: 4

Artikel: Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt

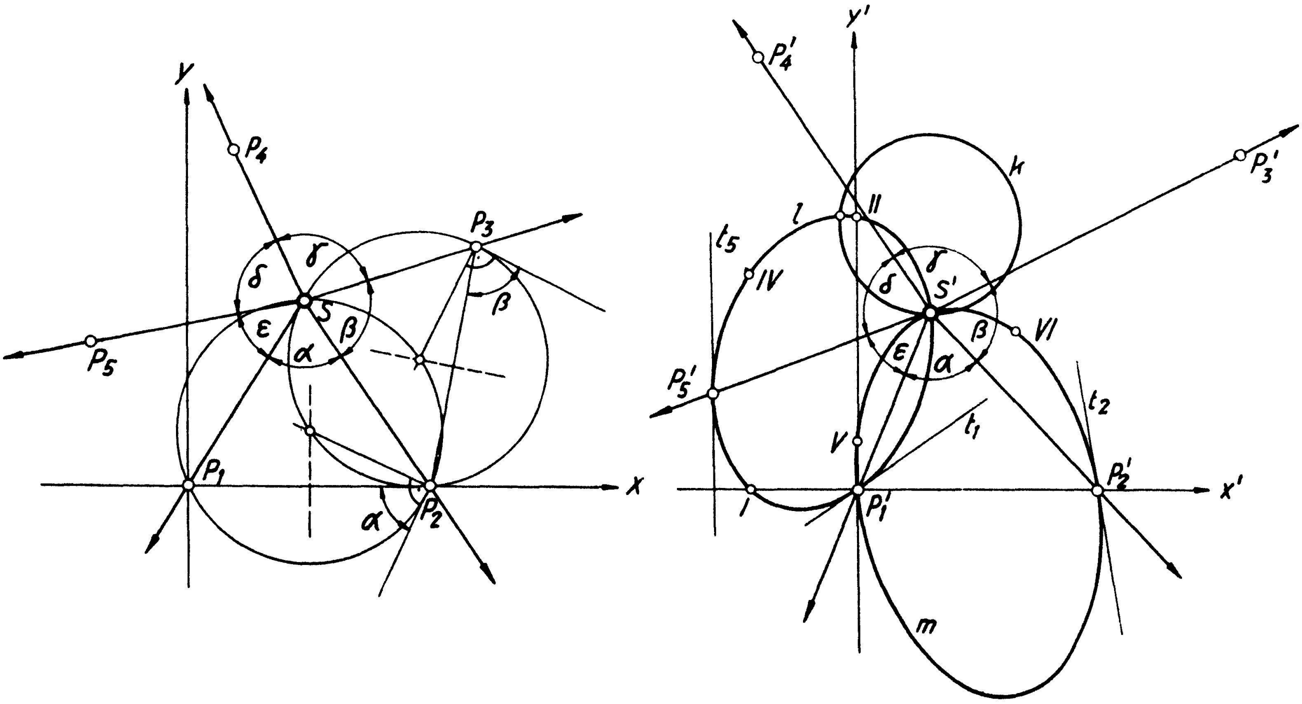
Autor: Hofmann, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19777

Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt

(Schluss)

Damit gehen wir nun zur Behandlung der eingangs gestellten Aufgabe über. Es sollen also in der Zeichenebene, die hier mit den beiden Ebenen ε und ε' zusammenfällt, zwei Gruppen von je fünf Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ gegeben sein, und wir fragen nach zwei Punkten S und S', aus denen die Punktgruppen



Figur 2

durch kongruente Strahlbüschel projiziert werden. Wir wollen dabei zunächst gleichsinnige Kongruenz der beiden Büschel fordern.

Wir beziehen die erste Punktgruppe auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem X, Y (Figur 2), wobei wir den Punkt P_1 als Ursprung wählen und die X-Achse durch den Punkt P_2 hindurchlegen. Auf homogene Koordinaten $x:y:z = X:Y:1$ übergehend, mögen sich dabei die folgenden Koordinatenwerte ergeben:

$$P_1(0, 0, 1); \; P_2(5, 0, 1); \; P_3(6, 5, 1); \; P_4(1, 7, 1); \; P_5(-2, 3, 1).$$

Die zweite Punktgruppe beziehen wir auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem X', Y', wobei wir den Punkt P_1' zum Ursprung machen und die X'-Achse durch den Punkt P_2' hindurchlegen. Weiter denken wir uns das Punktsystem ähnlich so transformiert, dass die Strecke $P_1'P_2'$ gleich wird der Strecke P_1P_2. Es bedeutet dies natürlich keine Einschränkung unserer Aufgabe.

Gehen wir wieder auf homogene Koordinaten $x':y':z' = X':Y':1$ über, so mögen sich für die Punkte der zweiten Punktgruppe die folgenden Koordinatenwerte ergeben:

$$P_1'(0, 0, 1);\ P_2'(5, 0, 1);\ P_3'(8, 7, 1);\ P_4'(-2, 9, 1);\ P_5'(-3, 2, 1).$$

Die drei Lösungen unserer Aufgabe ergeben sich aus den ausgearteten Korrelationen der Zeichenebene in sich, für welche die fünf Punktepaare P_1, P_1'; P_2, P_2'; P_3, P_3'; P_4, P_4'; P_5, P_5' Paare konjugierter Punkte darstellen und jeder der beiden Kreispunkte J und K der Zeichenebene sich selbst konjugiert ist.

Setzen wir in die bilineare Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\, x\, x' + a_{12}\, x\, y' + a_{13}\, x\, z' \\ &+ a_{21}\, y\, x' + a_{22}\, y\, y' + a_{23}\, y\, z' \\ &+ a_{31}\, z\, x' + a_{32}\, z\, y' + a_{33}\, z\, z' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

zwischen den Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') in der Zeichenebene, durch welche die Korrelationen in dieser Ebene dargestellt sind, die Koordinaten der beiden einander konjugierten Punkte $P_1\,(0, 0, 1)$ und $P_1'(0, 0, 1)$ ein, so ergibt sich, dass

$$a_{33} = 0 \tag{11}$$

ist.

Jeder der beiden absoluten Kreispunkte J und K der Zeichenebene ergibt jeweils in beiden Koordinatensystemen in dieser Ebene dieselben Koordinatenwerte, und wir setzen $J(1, i, 0)$ und $K(1, -i, 0)$. Setzt man in (10) die Koordinaten eines dieser Punkte, also etwa des ersteren ein, so ergibt sich die Gleichung

$$a_{11} - a_{22} + i\,(a_{12} + a_{21}) = 0$$

und daraus

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{und} \quad a_{12} = -a_{21} \text{ [3]}. \tag{12}$$

Ordnet man schliesslich noch dem Punkt $P_1: x = 0,\ y = 0,\ z = 1$ den auf der Ferngeraden der Zeichenebene beliebig gewählten Punkt $\overline{P}_1': x' = 1,\ y' = \lambda,\ z' = 0$ zu, so ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten dieser beiden einander konjugierten Punkte in (10) die Beziehung

$$a_{31} = -\lambda\, a_{32}. \tag{13}$$

Vermöge (11), (12), (13) vereinfacht sich nun die Gleichung (10) zu

$$a_{11}\,(x\,x' + y\,y') + a_{12}\,(x\,y' - y\,x') + a_{13}\,x\,z' + a_{23}\,y\,z' + a_{32}\,(y' - \lambda\,x')\,z = 0. \tag{14}$$

Setzt man in (14) der Reihe nach die Koordinaten der zu Paaren vereinigten Punkte P_2, P_2'; P_3, P_3'; P_4, P_4'; P_5, P_5' ein, so ergeben sich für die Koeffizienten

---

[3]) Durch Heranziehen des absoluten Kreispunktes K ergibt sich natürlich dasselbe Resultat.

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}$ die vier Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
25\,a_{11} \qquad\qquad + 5\,a_{13} \qquad - \qquad 5\,\lambda\,a_{32} &= 0\,,\\
83\,a_{11} + 2\,a_{12} + 6\,a_{13} + 5\,a_{23} + (7 - 8\,\lambda)\,a_{32} &= 0\,,\\
61\,a_{11} + 23\,a_{12} + a_{13} + 7\,a_{23} + (9 + 2\,\lambda)\,a_{32} &= 0\,,\\
12\,a_{11} + 5\,a_{12} - 2\,a_{13} + 3\,a_{23} + (2 + 3\,\lambda)\,a_{32} &= 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Aus (15) erhält man durch eine einfache Rechnung für die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{32}$ die Beziehung

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{23} : a_{32}\\
&\quad = (112\,\lambda - 207) : (-\,84\,\lambda - 161) : (84\,\lambda + 1035) : (-\,896\,\lambda + 1357) : 644\,.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Unter Heranziehung von (16) erhält man aus (14)

$$\left.\begin{aligned}
&(112\,\lambda - 207)\,(x\,x' + y\,y') + (84\,\lambda + 161)\,(y\,x' - x\,y') + (84\,\lambda + 1035)\,x\,z'\\
&\qquad + (1357 - 896\,\lambda)\,y\,z' + 644\,z\,(y' - \lambda\,x') = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Diese bilineare Gleichung zwischen den Koordinaten (x, y, z) und (x', y', z') ergibt für jeden Wert von λ eine Korrelation in der Zeichenebene, für welche P_1, P_1'; P_2, P_2'; P_3, P_3'; P_4, P_4'; P_5, P_5' Paare konjugierte Punkte darstellen und jeder der beiden Kreispunkte der Zeichenebene sich selbst konjugiert ist. Lässt man dabei die Grösse λ alle reellen Werte durchlaufen, so erhält man alle reellen Korrelationen der genannten Art, wobei die den Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, J, K$ bzw. entsprechenden Geraden $p_1', p_2', p_3', p_4', p_5', i', k'$ projektive Strahlenbüschel mit den Scheiteln $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', J, K$ beschreiben.

Je zwei dieser Strahlenbüschel erzeugen einen Kegelschnitt, und die den drei Lösungen unserer Aufgabe entsprechenden Punkte S' ergeben sich, wie wir gesehen haben, als Schnittpunkte je zweier dieser Kegelschnitte.

Die Strahlen p_1' des Büschels P_1' erhält man durch Einsetzen der Koordinaten der Punkte $P_1(0, 0, 1)$ in (17) mit

$$y' - \lambda\,x' = 0, \tag{18}$$

und die ihnen projektiv entsprechenden Strahlen p_5' des Büschels P_5' durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P_5(-2, 3, 1)$ in (17) mit

$$x'\,(897 - 616\,\lambda) + y'\,(345 + 504\,\lambda) + z'\,(2001 - 2856\,\lambda) = 0\,. \tag{19}$$

Eliminiert man aus (18) und (19) den Parameter λ, so erhält man die Gleichung des von den beiden projektiven Büscheln erzeugten Kegelschnittes l. Einzelne Punkte dieses Kegelschnittes ergeben sich, wenn man entsprechende Strahlen p_1' und p_2' der beiden Büschel zum Schnitt bringt.

So erhält man für $\lambda = 0$ aus (18) und (19) die beiden einander entsprechenden Strahlen $y' = 0$ und $897\,x' + 345\,y' + 2001\,z' = 0$ (Figur 2) und daraus den Schnittpunkt I des Kegelschnittes l mit der Abszissenachse mit

$$X' = \frac{x'}{z'} = -\frac{2001}{897} \doteq -2{,}23; \quad Y' = \frac{y'}{z'} = 0.$$

Für $\lambda = \infty$ wird (18) und (19) bzw. zu $x' = 0$ und $616\,x' - 504\,y' + 2856\,z' = 0$, woraus sich der Schnittpunkt II von l mit der Ordinatenachse mit

$$X' = \frac{x'}{z'} = 0, \quad Y' = \frac{y'}{z'} = \frac{2856}{504} \doteq 5{,}66$$

ergibt.

Der dem Wert $\lambda = -2/3$ entsprechende Strahl des Büschels P_1' geht durch P_5' hindurch, so dass sich für diesen Wert von λ aus (19) die Gleichung der Tangente t_5 des Kegelschnittes l im Punkt P_5' mit $1308\,x' + 9\,y' + 3905\,z' = 0$ ergibt.

Umgekehrt erhält man für den Strahl des Büschels P_5', der durch den Punkt P_1' (0, 0, 1) hindurchgeht, durch Einsetzen der Koordinaten des letzteren Punktes in (19)

$$2001 - 2856\,\lambda = 0$$

und daraus den Parameterwert $\lambda = 2001/2856 = 0{,}7$. Die Tangente t_1 des Kegelschnittes l im Punkt P_1' ist dann wegen (18) durch $y' = 0{,}7\,x'$ gegeben.

Weiter ergeben sich für den Parameterwert $\lambda = 3$ aus (18) und (19) bzw. die Strahlen

$$y' - 3\,x' = 0 \quad \text{und} \quad 317\,x' - 619\,y' + 2189\,z' = 0$$

und als deren Schnitt der Punkt III des Kegelschnittes l mit den Koordinaten

$$X' = \frac{x'}{z'} \doteq 1{,}42, \quad Y' = \frac{y'}{z'} \doteq 4{,}26.$$

In völlig analoger Weise erhält man für den Parameterwert $\lambda = -2$ den Punkt IV von l mit den Koordinaten $X' \doteq -2{,}23$, $Y' \doteq 4{,}46$.

Unter Zuhilfenahme der Punkte P_1', P_5', I, II, III, IV und der Tangenten t_1 und t_5 wurde in Figur 2 der Kegelschnitt l gezeichnet, wobei auch noch die Tangenten von l in den Punkten I, II, III, IV nach dem Pascalschen Satz konstruiert wurden. Die letztgenannten Tangenten und der Punkt III wurden jedoch in der endgültigen Figur nicht eingezeichnet.

Wir betrachten nun den Kegelschnitt m, der von den beiden projektiven Strahlenbüscheln mit den Scheiteln P_1' und P_2' erzeugt wird.

Während das erste Büschel wieder durch

$$y' = \lambda\,x' \tag{20}$$

dargestellt wird, ergibt sich das zweite durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes P_2: $x = 5$, $y = 0$, $z = 1$ in (17) mit

$$(1035 + 84\,\lambda)\,x' + (161 + 420\,\lambda)\,y' - (5175 + 420\,\lambda)\,z' = 0. \tag{21}$$

Mit $\lambda = 0$ erhält man aus (21) die Gleichung der Tangente t_2 des Kegelschnittes m im Punkt P_2' mit

$$1035\,x' + 161\,y' - 5175\,z' = 0 \quad \left(m = -\frac{1035}{161} \doteq -6{,}43\right).$$

Für $\lambda = \infty$ wird (21) zu

$$84\,x' + 420\,y' - 420\,z' = 0$$

und ergibt für $x' = 0$ den Schnittpunkt V von m mit der y-Achse mit

$$X' = 0\,, \quad Y' = \frac{y'}{z'} = 1\,.$$

Für $\lambda = 1$ sind die projektiv sich entsprechenden Strahlen der beiden Büschel dargestellt durch die Gleichungen $y' = x'$ und

$$1119\,x' + 581\,y' - 5595\,z' = 0$$

und ergeben im Schnitt den Punkt VI der Kurve m mit

$$X' = \frac{x'}{z'} \doteq 3{,}3\,, \quad Y' = \frac{y'}{z'} \doteq 3{,}3\,.$$

Schliesslich erhält man mit $\lambda = 3$ aus (20) und (21) den Punkt VII von m mit

$$X' = \frac{x'}{z'} \doteq 1{,}16\,, \quad Y' = \frac{y'}{z'} \doteq 3{,}48\,.$$

Unter Heranziehung der Punkte P_1', P_2', V, VI, VII und der Tangente t_2 wurde in Figur 2 der Kegelschnitt m gezeichnet, wobei auch noch die Tangenten von m in den Punkten VI und VII konstruiert, jedoch sowie Punkt VII in der endgültigen Figur nicht eingezeichnet wurden.

Die Kegelschnitte l und m gehen durch den Punkt P_1' hindurch, und von ihren drei weiteren Schnittpunkten ist einer – S' – reell, während die beiden übrigen konjugiert komplex sind. Von den *drei* Lösungen der gestellten Aufgabe ist also im vorliegenden Falle nur *eine*, nämlich die durch den Punkt S' gegebene, reell.

Zur Probe soll nun noch der Kegelschnitt k herangezogen werden, der von den beiden projektiven Strahlenbüscheln mit den Scheiteln J und K erzeugt wird. Er muss durch den Punkt S' (und natürlich auch durch die beiden konjugiert-komplexen Schnittpunkte von l und m) hindurchgehen.

Da der Kegelschnitt k nun auch durch die Scheitel der beiden ihn erzeugenden Büschel J und K, die ja die absoluten Kreispunkte der Zeichenebene darstellen, hindurchgeht, ist er ein Kreis.

Setzt man in (14) einmal die Koordinaten des Punktes J: $x = 1$, $y = i$, $z = 0$ und ein zweites Mal die Koordinaten des Punktes K: $x = 1$, $y = -i$, $z = 0$ ein, so erhält man die beiden Gleichungen

$$a_{11}\,(x' + i\,y') + a_{12}\,(y' - i\,x') + a_{13}\,z' + a_{23}\,i\,z' = 0\,,$$

$$a_{11}\,(x' - i\,y') + a_{12}\,(y' + i\,x') + a_{13}\,z' - a_{23}\,i\,z' = 0$$

und daraus durch Addition bzw. Subtraktion die beiden Gleichungen

$$a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}\,z' = 0\,, \quad a_{11}\,y' - a_{12}\,x' + a_{23}\,z' = 0\,.$$

Setzt man nunmehr für a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23} die Werte (16) ein, so ergibt sich

$$(112\,\lambda - 207)\,x' - (\;84\,\lambda + 161)\,y' + (\;84\,\lambda + 1035)\,z' = 0\,,$$

$$(\;84\,\lambda + 161)\,x' - (112\,\lambda - 207)\,y' - (896\,\lambda - 1375)\,z' = 0$$

und daraus

$$\lambda\,(112\,x' - \;84\,y' + \;84) = \;207\,x' + 161\,y' - 1035\,,$$

$$\lambda\,(\;84\,x' + 112\,y' - 896) = -\,161\,x' + 207\,y' - 1375\,.$$

Durch Elimination von λ aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$1265\,x'^2 + 1265\,y'^2 - 3818\,x' - 13984\,y' + 37191 = 0$$

und daraus durch eine einfache Umformung

$$(x' - 1{,}51)^2 + (y' - 5{,}52)^2 = 1{,}84^2$$

als die Gleichung des Kreises k in der Normalform.

Der Kreis k wurde in Figur *2* eingezeichnet und geht, wie man sieht, durch den Punkt S' hindurch.

Ist der Punkt S' ermittelt, so kann der ihm entsprechende, der Punktgruppe $P_1P_2P_3P_4P_5$ zugehörende Punkt S sehr einfach gefunden werden. Stellt man nämlich die Forderung, dass drei der obigen fünf Punkte, also etwa P_1, P_2, P_3 durch Projektion aus S ein Strahlbüschel ergeben, das kongruent ist dem Strahlbüschel, das durch Projektion der Punkte P_1', P_2', P_3' aus S' sich ergibt, so führt die Ermittlung des Punktes S auf die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens. Die konstruktive Durchführung ist aus Figur *2* ersichtlich, in der dann auch die Übereinstimmung je zweier entsprechenden durch Projektion der beiden Punktgruppen aus S und S' sich ergebenden Winkel, also $P_1SP_2 = P_1'S'P_2' = \alpha$; $P_2SP_3 = P_2'S'P_3' = \beta$ usw. überprüft werden kann.

Wir haben bei der eingangs gestellten Aufgabe gleichsinnige Kongruenz der beiden durch Projektion der Punktgruppen sich ergebenden Strahlbüschel gefordert. Verlangen wir im Gegensatz dazu ungleichsinnige Kongruenz der beiden Strahlbüschel, so stellen in der der Lösung der Aufgabe zugrunde gelegten Korrelation die beiden Kreispunkte J und K ein Paar konjugierter Punkte dar.

Setzt man in (10) die Koordinaten dieser beiden Punkte

$$J\colon\; x = 1\,,\; y = i\,,\; z = 0 \quad \text{und} \quad K\colon\; x' = 1\,,\; y' = -i\,,\; z' = 0$$

ein, so ergibt sich die Gleichung

$$a_{11} + a_{22} + i\,(a_{21} - a_{12}) = 0$$

und daraus

$$a_{11} = -a_{22} \quad \text{und} \quad a_{21} = a_{12}\,.$$

Diese beiden Beziehungen zwischen den Koeffizienten hätten an die Stelle der durch (12) ausgedrückten Relationen zu treten.

Ansonsten würde die Durchführung der Aufgabe völlig analog jener verlaufen, die sich bei gleichsinniger Kongruenz der beiden Strahlenbüschel ergibt.

L. HOFMANN, Wien

Ungelöste Probleme

Nr. 24. P. ERDÖS hat gelegentlich die Frage aufgeworfen, ob eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge existiert, für die je zwei Punkte eine rationale Distanz aufweisen. Dass es auf der Geraden dicht liegende Punktmengen dieser Eigenschaft gibt, ist trivial; es genügt, die Menge der Punkte zu bilden, die von einem fest gewählten Punkt der Geraden rationale Entfernungen besitzen.

Weniger plausibel und interessant ist die Tatsache, dass es möglich ist, auf der Kreislinie abzählbar-unendlich viele Punkte überall dicht so zu verteilen, dass alle Distanzen rational ausfallen. Anschliessend an eine Fragestellung von E. TROST[1]) hat A. MÜLLER[2]) ein einfaches Verfahren angegeben, das auch die Konstruktion einer derartigen Punktmenge auf der Kreislinie erlaubt. In der Tat: Man wähle den Winkel φ so, dass $\cos\varphi = 4/5$ und $\sin\varphi = 3/5$ wird. Es ist dann φ mit π inkommensurabel, so dass φ/π irrational ausfällt. Die abzählbar-unendlich vielen Punkte P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ der Ebene mit den Polarkoordinaten $r_n = 1$; $\theta_n = 2\,n\,\varphi$ liegen auf der Peripherie des Einheitskreises um den Ursprung überall dicht und sind dort sogar gleichverteilt. Für die euklidische Distanz $D = D(P_n, P_m)$ zweier Punkte P_n und P_m resultiert $D = 2\,|\sin(n-m)\,\varphi|$ und, wie man mit Verwendung der geläufigen trigonometrischen Formeln leicht bestätigt, D wird rational. – Auf die eingangs erwähnte Frage zurückkommend, müssen wir einräumen, dass es recht schwer fällt, an die Existenz einer in der ganzen Ebene dicht liegenden Punktmenge der betrachteten Eigenschaft zu glauben, jedoch wird man nach den vielen Erfahrungen mit «Paradoxien» der Punktmengenlehre auch zur Vorsicht neigen. Unser Problem: Gibt es eine in der Ebene überall dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge, deren Punktepaare alle rationale Distanzen aufweisen?

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 12. J. J. SCHÄFFER (Montevideo) teilte uns eine einfache Konstruktion[3]) mit, die zeigt, dass das reguläre n-Eck sicher nicht den grösstmöglichen Flächeninhalt unter allen konvexen n-Ecken gleichen Durchmessers aufweist, falls

---

[1]) E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, El. Math. *6*, 59 (1951).

[2]) A. MÜLLER, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen*, El. Math. *8*, 37–38 (1953). Weitere Beiträge zu dieser Frage lieferten M. ALTWEGG [El. Math. *7*, 56–58 (1952)] und F. STEIGER [El. Math. *8*, 66–67 (1953)].

[3]) Brief vom 13. Januar 1957 an den Unterzeichneten.