Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 4

Artikel: Eine Bemerkung zum Waringschen Problem
Autor: Trost, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19775

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 4 Seiten 73–96 Basel, 10. Juli 1958

Eine Bemerkung zum Waringschen Problem

Das Waringsche Problem besteht in der Darstellung einer positiven ganzen Zahl n als Summe einer festen Anzahl s von nichtnegativen k-ten Potenzen. $g(k)$ bezeichne für ein gegebenes k die kleinste Anzahl s, die zur Darstellung eines jeden n ausreicht. E. WARING vermutete 1770, dass für jedes k eine solche Zahl $g(k)$ existiert. Diese Vermutung wurde aber erst nach mehr als 100 Jahren von D. HILBERT bewiesen[1]). Nachdem die Existenz von $g(k)$ gesichert war, konzentrierte sich das Interesse auf die Bestimmung des numerischen Wertes. $g(2) = 4$ und $g(3) = 9$ sind seit langem bekannt, hingegen kennt man von $g(4)$ und $g(5)$ bis heute nur die Ungleichungen

$$19 \leqq g(4) \leqq 35, \quad 37 \leqq g(5) \leqq 54.$$

Für $k \geqq 6$ ergibt sich aus den Untersuchungen der letzten 25 Jahre folgende Aussage, wobei $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$ bedeutet[2]):

Für alle $k \geqq 6$, für die die Ungleichung

$$3^k - 2^k A_k \leqq 2^k - A_k - 2, \qquad A_k = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \tag{1}$$

erfüllt ist, gilt

$$g(k) = 2^k + A_k - 2. \tag{2}$$

Der genaue Wert von $g(k)$ für die (1) allenfalls nicht erfüllenden $k \geqq 6$ ist auch bekannt[1]), so dass sich $g(k)$ für jedes $k \geqq 6$ berechnen lässt.

Dass mindestens $2^k + A_k - 2$ k-te Potenzen notwendig sind, zeigt die Zahl

$$m = 2^k A_k - 1 = (A_k - 1) \cdot 2^k + (2^k - 1) \cdot 1^k,$$

die sich wegen $m < 3^k$ nur durch Potenzen von 1 und 2 darstellen lässt. Da $m \equiv -1 \pmod{2^k}$, muss die Anzahl der Potenzen von 1 in dieser Darstellung die Form $t\,2^k - 1$ haben, und die Gesamtzahl $A_k - t + t\,2^k - 1$ der Summanden ist für $t = 1$ minimal.

[1]) Eine kurzgefasste Übersicht über die Geschichte des Waringschen Problems mit Literaturangaben findet man in HARDY-WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3. Aufl. (Oxford 1954), S. 335–338. Deutsche Ausgabe, R. Oldenburg, München 1958, S. 382–385.

[2]) Vergleiche die Werke in [1]), S. 337 bzw. 384.

Die Ungleichung (1) ist für $4 \leqq k \leqq 400$ erfüllt, und man vermutet, dass sie für alle $k > 3$ richtig ist. Ein Beweis dafür steht aber, soviel wir wissen, noch aus. Wir wollen hier (1) durch eine etwas durchsichtigere Bedingung ersetzen, aus der man insbesondere leicht erkennen kann, dass (1) sicher für *unendlich viele k* richtig ist[3]). So ergibt sich der

Satz: *Ist $k \geqq 6$ und gibt es eine natürliche Zahl x_k im Intervall*

$$\frac{3^k}{2^k} + \lambda_k \leqq x_k < \frac{3^k}{2^k} + 1, \qquad \lambda_k = \frac{1 + (3/2)^k}{2^k - 1}, \tag{3}$$

so ist

$$g(k) = 2^k + x_k - 3.$$

Beweis: Um aus (1) die Existenz einer natürlichen Zahl x_k im Intervall (3) abzuleiten, hat man nur in (1) und der evidenten Ungleichung

$$0 < 3^k - 2^k A_k \tag{4}$$

$A_k = x_k - 1$ zu setzen. Setzt man umgekehrt in (3) $x_k = B_k + 1$, so erhält man wieder die Ungleichungen (1) und (4) mit B_k anstelle von A_k. Also gilt

$$\frac{3^k}{2^k} > B_k \geqq \frac{3^k - 2^k + 2}{2^k - 1} = \frac{3^k + 1}{2^k - 1} - 1 > \frac{3^k}{2^k} - 1.$$

Ist nun x_k ganz, so ist auch B_k ganz, und es folgt $B_k = [(3/2)^k] = A_k$, da es in einem offenen Intervall der Länge 1 nur eine einzige ganze Zahl geben kann. Damit ist die Äquivalenz von (1) und (3) bewiesen.

λ_k strebt monoton gegen Null und kann für grosse k durch $(3/4)^k$ ersetzt werden. So ist zum Beispiel $\lambda_{400} = 1{,}06 \cdot 10^{-50}$.

Zum Beweis, dass (2) für unendlich viele k gilt, benutzen wir folgendes

Lemma: *Setzt man*

$$3^k = 2^k A_k + r_k, \qquad 0 < r_k < 2^k,$$

so ist

$$r_{k+1} = 3\, r_k + \varepsilon \cdot 2^k,$$

wo

$$\varepsilon = -2,\ -1,\ 0,\ 1.$$

Beweis: Es ist $0 < 3\, r_k < 2^{k+1} + 2^k$. Für $A_k = 2\,u + 1$ wird

$$3^{k+1} = (3\,u + 1)\, 2^{k+1} + 2^k + 3\, r_k.$$

Hieraus folgt

$$r_{k+1} = 3\, r_k + 2^k \qquad \text{für } 3\, r_k < 2^k,$$

$$r_{k+1} = 3\, r_k - 2^k \qquad \text{für } 3\, r_k > 2^k.$$

Für $A_k = 2\,u$ wird

$$3^{k+1} = 3\,u \cdot 2^{k+1} + 3\, r_k,$$

---

[3]) Diese Bemerkung fehlt auch im neuesten, sehr ausführlichen Übersichtsartikel von G. PALAMÀ, *Il problema di Waring*, Boll. Un. mat. ital. [Ser. III] *12*, 83–100 (1957).

und man hat

$$r_{k+1} = 3\,r_k \quad \text{für } 3\,r_k < 2^{k+1}, \qquad r_{k+1} = 3\,r_k - 2^{k+1} \quad \text{für } 3\,r_k > 2^{k+1}.$$

Wir setzen jetzt

$$\delta_k = 1 - \frac{r_k}{2^k} = x_k - \frac{3^k}{2^k}, \qquad 0 < \delta_k < 1.$$

Nach dem Lemma ist

$$\delta_{k+1} = \frac{3}{2}\,\delta_k - \frac{\varepsilon+1}{2}, \qquad \varepsilon = -2,\ -1,\ 0,\ 1. \tag{5}$$

Im Intervall (3) liegt dann und nur dann eine ganze Zahl x_k, wenn $\lambda_k \leqq \delta_k$. Wir nehmen jetzt an, dass für $k > k_0 > 400$ stets $\delta_k < \lambda_k$ gilt, dass also (2) nur für endlich viele k richtig ist. Insbesondere hat man dann für alle $k > k_0$ die grobe Abschätzung $\delta_k < 1/3$, die wegen $\delta_{k+1} > 0$ zur Folge hat, dass in (5) nur $\varepsilon = -2$ und $\varepsilon = -1$ möglich sind. Für δ_{k+1} kommen also nur die Werte

$$\frac{3}{2}\,\delta_k \qquad \text{oder } \frac{3}{2}\,\delta_k + \frac{1}{2}$$

in Frage, und man hat also für $k > k_0$ und $i \geqq 1$

$$\delta_{k+1} \geqq \frac{3}{2}\,\delta_k, \qquad \delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k.$$

Bestimmt man i so, dass

$$\left(\frac{3}{2}\right)^i \geqq \frac{\lambda_k}{\delta_k} > 1,$$

dann ist aber

$$\delta_{k+i} \geqq \left(\frac{3}{2}\right)^i \delta_k \geqq \lambda_k > \lambda_{k+i}$$

im Widerspruch zu unserer Annahme. E. TROST

Überraschende Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wird eine symmetrische Münze $2\,n$-mal geworfen, so hat unter allen möglichen Ergebnissen die Gleichverteilung mit n-mal Kopf und n-mal Schrift die grösste Wahrscheinlichkeit. Sind 200 Kugeln auf 20 Fächer zu verteilen, dann kommt der Gleichverteilung mit 10 Kugeln pro Fach die grösste Wahrscheinlichkeit zu. Zieht man aus einer Urne, welche die Nummern 1–100 enthält, zehn Nummern, so verteilen sie sich mit der grössten Wahrscheinlichkeit auf die zehn Zehner. Beim Jass wird man mit der grössten Wahrscheinlichkeit zwei Karten einer bestimmten Sorte erwarten dürfen. Immer kommt der Gleichverteilung die grösste Wahrscheinlichkeit zu.

Peter und Paul werfen mit einer Münze und wetten um die Geldeinheit. Peter setzt auf Kopf, und sein gesamter Gewinn bzw. Verlust bis und mit dem n-ten Spiel werde mit S_n bezeichnet und dementsprechend der Gewinn von Paul mit $-S_n$. Um