Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1958)

Heft: 3

Rubrik: Literaturüberschau

Das Rechteck $ABCD$ hat die Seiten $AB=\sqrt{2}$, $BC=1$. Über AB wird nach aussen der Halbkreis gezeichnet und darauf der Punkt P gewählt. Die Strecken PD und PC schneiden AB in E und F. Stets gilt

$$AF^2+BE^2=AB^2.$$

▶ Beweis nach HACKEN, Mathésis *1907*: Die Geraden PA und PB schneiden DC in G und H. Wegen

$$\frac{AF}{GC}=\frac{BE}{HD}=\frac{AB}{GH}$$

ist die Behauptung gleichbedeutend mit

$$GC^2+HD^2=GH^2$$

oder

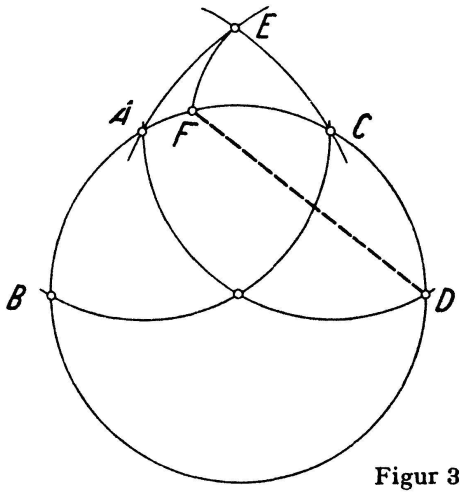
$$(GD+\sqrt{2})^2+(CH+\sqrt{2})^2=(GD+CH+\sqrt{2})^2,$$

woraus

$$1=GD\cdot CH,$$

was unmittelbar eingesehen wird.

5. MASCHERONI hat in seiner *Geometria del compasso* (1797) auch Näherungskonstruktionen bekanntgegeben. Die folgende leichtverständliche Konstruktion für die Länge eines Viertelskreises benötigt nur fünf Kreisbögen und ist verblüffend genau. A wird frei gewählt, die übrigen Punkte ergeben sich in alphabetischer Reihenfolge. Es ist $DF\sim r\,\pi/2$. Der Fehler beträgt $-0{,}0004\,r$.



Figur 3

Literaturüberschau

A. W. POGORELOW:

Die eindeutige Bestimmung allgemeiner konvexer Flächen

80 Seiten. Akademie-Verlag, Berlin 1956

Die in Übersetzung aus dem Russischen wiedergegebene Arbeit enthält den Beweis für den Satz, dass zwei konvexe Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes, deren Oberflächenpunkte so aufeinander bezogen werden können, dass je zwei sich entsprechende Kurven auf der Oberfläche gleiche Länge besitzen, deckungs- oder spiegelgleich sind; kürzer: dass aus der Isometrie geschlossener, konvexer Flächen die Kongruenz folgt. Damit wird in der Klasse aller konvexen geschlossenen Flächen ein Sachverhalt sichergestellt, der unter einschränkenden Regularitätsvoraussetzungen den Gegenstand wichtiger differentialgeometrischer Arbeiten von H. WEYL (1917), S. COHN-VOSSEN (1927) und G. HERGLOTZ (1943) bildete. Dem sich über fast 40 Seiten erstreckenden indirekten Beweis geht eine lesenswerte gedrängte Zusammenstellung der verwendeten Grundbegriffe voraus; sie gibt Einblick in die von A. D. ALEXANDROW entwickelte innere Geometrie der konvexen Flächen. Da diese neuerdings neben die differentialgeometrische Untersuchungsmethode tretende, auf die Punktmengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen gestützte Behandlungsweise der Flächentheorie durch ihre Anschaulichkeit und durch die bisher erzielten Resultate grosses Interesse hervorgerufen hat, ist die vom Verlag geplante und teilweise schon herausgegebene Übersetzung der hauptsächlichsten Arbeiten in eine dem Westen leicht zugängliche Sprache sehr zu begrüssen. H. DEBRUNNER

H. HOYER: *Arithmetik und Algebra.* 194 Seiten
M. WIDOK: *Einführung in die Funktionenlehre.* 105 Seiten
E. HEIMBURG: *Beispielsammlung zur Differentialrechnung.* 172 Seiten
E. HEIMBURG: *Beispielsammlung zur Integralrechnung.* 132 Seiten

Die angezeigten Bände gehören zur Sammlung «Mathematik für Ingenieure» des Verlages Georg Westermann, Braunschweig, die in sehr ausführlicher und leicht verständlicher Art den (Fachschul-) Ingenieur mit der elementaren und mit den Anfängen der höheren Mathematik vertraut machen will. Die zahlreichen, zum Teil vollständig gelösten Übungsaufgaben lassen die Bücher auch als zum Selbststudium geeignet erscheinen; doch tritt die Behandlung von angewandten Beispielen gegenüber den vielen reinen Rechenaufgaben etwas stark zurück. Trotz der im Titel zum Ausdruck kommenden Zielsetzung fehlen in der vorliegenden Sammlung Hinweise auf die Verfahren der praktischen Mathematik. R. INEICHEN

K. PRACHAR: *Primzahlverteilung*

415 Seiten. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 91. Springer-Verlag, Berlin 1957

Das 1909 erschienene und abgesehen von einer Einleitung kürzlich unverändert neu herausgegebene *Handbuch* von E. LANDAU war bis zum Erscheinen des vorliegenden Werkes die einzige gross angelegte Darstellung der Theorie der Primzahlverteilung. Dieser im Hinblick auf die in den letzten Jahrzehnten erzielten grossen Fortschritte bedauerliche Mangel ist durch das Buch von PRACHAR in glücklichster Weise beseitigt worden. Dem selbst aktiv in der Primzahlforschung tätigen Verfasser ist es gelungen, den heutigen Stand der Theorie zu einem sehr grossen Teil in einheitlicher Form wiederzugeben. Die zum Verständnis notwendigen Vorkenntnisse beschränken sich auf einfache Grundtatsachen aus der Differential- und Integralrechnung sowie aus der Funktionen- und Zahlentheorie. Weitergehende Hilfsmittel sind in einem Anhang bereitgestellt. Dass einige Beweise wegen ihrer Länge und dem Umfang des verwendeten analytischen Apparates nicht leicht zu lesen sind, liegt in der Natur der Sache. Der Verfasser hat sich aber auch in diesen Fällen bemüht, die leitenden Ideen deutlich hervortreten zu lassen. Der Prüfung des Verständnisses dienen interessante Aufgaben am Ende jedes Kapitels.

Dem ersten Kapitel mit elementaren Ergebnissen folgt im zweiten Kapitel eine ausführliche Darstellung der Selbergschen Siebmethode mit vielen Beispielen. Der Primzahlsatz ist das Thema des dritten Kapitels. Die Hilfsmittel aus der Funktionentheorie, die zu heute noch nicht elementar erhältlichen Abschätzungen führen, werden in vollem Ausmass dargestellt. Am Schluss des Kapitels findet man den «elementaren» Beweis von SELBERG-ERDÖS in der von BREUSCH gegebenen Variante. Im vierten Kapitel lernt der Leser die Theorie der L-Funktionen kennen, die Abschätzungen über die Anzahl der Primzahlen in einer arithmetischen Progression liefert. Das fünfte Kapitel enthält verschiedene Anwendungen von vorher gewonnenen Resultaten vor allem auf das Problem der Abschätzung der Differenzen konsekutiver Primzahlen. Die berühmte Vinogradoffsche Methode der trigonometrischen Summen führt im sechsten, dem Goldbachschen Problem gewidmeten Kapitel zum Beweis folgender beiden Sätze: 1. Jede genügend grosse ungerade Zahl ist als Summe von drei ungeraden Primzahlen darstellbar. 2. Fast alle geraden Zahlen sind als Summe von zwei ungeraden Primzahlen darstellbar. Die im siebten Kapitel entwickelten weitergehenden funktionentheoretischen Eigenschaften der L-Funktionen erlauben genauere Aussagen über die Unregelmässigkeiten der Primzahlverteilung, speziell über das Verhalten der Differenz $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. Ein Ausbau der Methode der trigonometrischen Summen im achten Kapitel führt zur besten heute bekannten Erweiterung des nullstellenfreien Bereiches der L-Funktionen. Tiefliegende Sätze über die Dichte dieser Nullstellen ermöglichen im neunten Kapitel Aussagen über die Verteilung der Primzahlen in «kurzen» arithmetischen Reihen und im zehnten Kapitel den Beweis des Satzes von LINNIK, nach welchem für die kleinste Primzahl p_1 in der arithmetischen Reihe $a, a+b, a+2b, \ldots$ $(a, b) = 1$, $a < b$, $b \geqq 2$, die Abschätzung $p_1 < b^C$ gilt, wobei C eine von b unabhängige Konstante ist.

Das Buch von PRACHAR wird für alle, die sich mit den tieferen Problemen der Primzahlverteilung beschäftigen wollen, unentbehrlich sein und hoffentlich diesem Spezialgebiet, in dem noch viele Fragen der Lösung harren, neue Freunde zuführen.

E. TROST

OSKAR BECKER: *Das mathematische Denken der Antike*

128 Seiten mit 70 Figuren. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1957

Weil der Weg durch das Auge anscheinend müheloser ist als der durch den Verstand, werden vielen Gymnasiasten herrliche Abbildungen griechischer Kunstwerke vorgeführt, während nur wenige mit dem zweiten Teil des *Griechischen Lesebuches* von WILAMOWITZ-MOELLENDORFF, das Texte zur griechischen Mathematik und Naturwissenschaft enthält, Bekanntschaft machen. Nun ruht aber unsere europäische Kultur mindestens ebensosehr auf der Mathematik der Griechen wie auf ihrer Philosophie, Literatur und Kunst. Wer darum das eine, griechisches Wesen im Bilde zu suchen, unternimmt, sollte das andere, ihm auch im mathematischen Denken zu begegnen, nicht lassen; um so mehr als durch die vorliegende Schrift keine sprachlichen Schwierigkeiten mehr zu einem solchen Verzicht zwingen. Es ist geradezu ein Hauptanliegen dieser Arbeit, den Freunden der Antike zu zeigen, dass auch hier – im Reiche der Mathematik – Götter sind. Aber auch die Mathematiker, die das schon wissen und des Verfassers Geschichte der antiken Mathematik kennen, kommen bei der Lektüre dieses Studienheftes zur Altertumswissenschaft (Heft 3) auf ihre Rechnung. Sie finden darin eine sehr sorgfältig ausgewählte und kenntnisreich erläuterte *Sammlung von Beispielen* aus der vorgriechischen und griechischen Mathematik. Als Folie für die Leistung der Griechen wird die ägyptische und babylonische Algebra und Rechentechnik vorgeführt, anschliessend die Anfänge der griechischen Mathematik bei THALES und PYTHAGORAS. Nach den quadratischen Aufgaben des 5. Jahrhunderts und der Entdeckung des Irrationalen folgen die berühmten kubischen Probleme: Die Verdoppelung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die besonders interessante Konstruktion des regelmässigen Siebenecks durch ARCHIMEDES (in der zugehörigen Figur 54 fehlt der Buchstabe K). Besondere Kapitel sind der Quadratur des Kreises, der Proportionenlehre des EUDOXOS, der Integrationsmethode des ARCHIMEDES, der griechischen Trigonometrie und der Diophantischen Arithmetik gewidmet. Ein Verzeichnis der benutzten Quellen und der wesentlichen Literatur von HANKEL bis VAN DER WAERDEN erhöhen noch den Wert dieses vorbildlichen Führers, der mehr weiss, als er sagt, und gerade darum das gesteckte Ziel erreicht: «über die antike Mathematik *präzise* Vorstellungen zu erwecken.»

W. HONEGGER

THEODOR SCHNEIDER: *Einführung in die transzendenten Zahlen*

150 Seiten. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 81. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957

Die Erkenntnis des Bestehens irrationaler Verhältnisse war eine folgenschwere Entdeckung der Griechen, mit der sich das mathematische Denken nun während mehr als zweitausend Jahren immer wieder auseinandersetzte. Im Zusammenhang mit der Frage nach der Existenzweise irrationaler Zahlen hat das allgemeine Problem der immanenten Bedeutung mathematischer Begriffe in den letzten hundert Jahren mancherlei merkwürdige Wandlungen erfahren.

Die erste Konstruktion von transzendenten Zahlen durch LIOUVILLE (1844) stellte einen ausserordentlichen Fortschritt dar und eröffnete neue Problemkreise. Es handelt sich um ein Gebiet, das heute erst durch einzelne Vorstösse erforscht werden konnte. Eine Überschau, zum Beispiel eine Klassifikation der transzendenten Zahlen, die naheliegenden Bedingungen genügen sollte, ist heute noch bei weitem nicht erreicht.

Es brauchte schon grosse Anstrengungen, die von HILBERT im Jahre 1900 in seiner berühmten Rede über ungelöste Probleme gestellte Frage nach der Transzendenz von α^β für algebraische α und β in den nichttrivialen Fällen zu beantworten.

Der Verfasser des vorliegenden Buches, dem wesentliche neue Ergebnisse zu verdanken sind, verfolgte das Ziel, die heute bekannten allgemeinen Beweismethoden darzustellen, auch wenn damit manche interessanten Einzeluntersuchungen nicht berücksichtigt werden konnten. Im ersten Kapitel wird die Liouvillesche Konstruktion transzendenter Zahlen schrittweise verallgemeinert bis zu dem weitreichenden Satz von THUE-SIEGEL-ROTH. Das zweite Kapitel bringt das bis heute Bekannte über transzendente Werte von periodischen Funktionen. Als Beispiele der gewonnenen Resultate mögen folgende Sätze genannt werden:

Für nichtverschwindendes α sind die Zahlen α und e^α nicht beide algebraisch. – Falls α algebraisch (aber ungleich null und eins) und β algebraisch-irrational sind, so ist α^β transzendent. – Der Quotient der Logarithmen algebraischer Zahlen ist entweder rational oder transzendent. – Der Umfang einer Ellipse mit algebraischen Achsenlängen ist transzendent.

Die weiteren drei Kapitel befassen sich mit der Mahlerschen Klassifikation, mit dem sogenannten Transzendenzmass und mit dem Problem der algebraischen Unabhängigkeit transzendenter Zahlen, wo auch der Lindemannsche Satz im Rahmen der allgemeinen Siegelschen Methode Platz findet. Das Buch schliesst mit der Angabe einiger offener Fragen. In einem kurzen Anhang werden noch einige Sätze über die Lösung von linearen, homogenen diophantischen Ungleichungs- und Gleichungssystemen bewiesen.

Es gibt sehr wenige zusammenfassende Darstellungen über transzendente Zahlen. Dem Autor und dem Verlag gebührt Dank für die Herausgabe des klar geschriebenen Werkes, das bei der weiteren Forschung, nicht zuletzt durch die Literaturhinweise, wertvolle Dienste leisten wird.

Derjenige, der sich in erster Linie für die grundlegenden Begriffsbildungen interessiert, bedauert, dass das Buch zum Cantorschen Diagonalverfahren keine Stellung bezieht. Auch die zum möglichst durchsichtigen Transzendenzbeweis von π so luzide Darstellung von LEBESGUE (*Constructions géométriques*, Paris 1950) wird nicht erwähnt, was bei einer Einführung in das ganze Gebiet vielleicht – mindestens für den Anfänger – doch nützlich wäre.

L. LOCHER-ERNST

G. H. HARDY und E. M. WRIGHT: *Einführung in die Zahlentheorie*

480 Seiten. R. Oldenburg, München 1958

Es handelt sich um die von H. RUOFF vorzüglich besorgte Übersetzung der dritten Auflage des englischen Originalwerkes, die wir früher[1]) besprochen haben. Dem Verlag kann für seine Initiative, dieses im englischen Sprachgebiet sehr verbreitete Buch weiteren Kreisen zugänglich zu machen, nur gratuliert werden, denn diese ausgereifte Darstellung gibt eine angenehm zu lesende und überall interessante Einführung in fast alle Gebiete der Zahlentheorie.

E. TROST

W. SPECHT: *Elementare Beweise der Primzahlsätze*

78 Seiten. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

Das vorliegende Büchlein enthält je einen «elementaren», bis in alle Einzelheiten ausgeführten, Beweis für den Primzahlsatz und seine Verallgemeinerung auf die Primzahlen einer arithmetischen Progression. Die Darstellung geht in allen wesentlichen Punkten auf die grundlegenden Arbeiten von A. SELBERG und H. N. SHAPIRO zurück. Alle spezielleren Hilfsmittel, insbesondere diejenigen aus der Charakterentheorie, werden zur Bequemlichkeit des Lesers entwickelt, so dass zum Verständnis nur einfache Grundtatsachen aus der Algebra und Zahlentheorie neben etwas Integralrechnung und reeller Funktionentheorie nötig sind.

E. TROST

[1]) Vgl. El. Math. *10*, 142 (1955).