Kleine Mitteilungen

Zur Definition $0^0 = 1 = \infty^0$

Herrn Frank Löbell zu seinem 65. Geburtstag in Verehrung gewidmet

1. Lehrbücher der Mathematik schliessen bei der Definition $z^0 = 1$ für rationale, reelle oder komplexe z meist den Wert $z = 0$ aus (erwähnen aber hierbei $z = \pm\infty$ oder ∞ nicht). Nicht so FALCKENBERG, *Elementare Reihenlehre* (Berlin 1926), S. 19, und PERRON, *Irrationalzahlen*, 2. Aufl. (Berlin 1939), S. 60, die für endliche reelle Basen a die Definition $a^0 = 1$, also $0^0 = 1$ aufstellen. Für manche Zwecke empfiehlt sich die wegen $\lim\limits_{z\to 0} z^0 = 1 = \lim\limits_{z\to\infty} z^0$ naheliegende strengstmögliche Definition

$$0^0 = 1 = \infty^0. \tag{1}$$

Dann gilt zum Beispiel der einfache Satz: Die Funktion $f(z) = z^0$ ist in der unberandeten komplexen z-Ebene, das heisst auf der unpunktierten Zahlenkugel analytisch und hat dort überall den Wert 1. Denn $1 - f(z) = f'(z) = f''(z) = \cdots = 0$ ist für alle z richtig. (1) ermöglicht die folgenden bequemen Schreibweisen:

1. Aus $f(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ folgt $f(0) = a_0 \cdot 0^0 = a_0$. Bei Verzicht auf die Definition $0^0 = 1$ wäre $f(0)$ nicht definiert, es sei denn, man schriebe $f(z) = a_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ (vgl. FALCKENBERG und PERRON). Einfache Beispiele ergeben sich bei folgender Spezialisierung der a_ν: Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ lassen sich die in unbestimmten t, z homogenen Polynome k-ten Grades $(t+z)^k$ und $(t^{k+1} - z^{k+1}) : (t - z)$ zum Beispiel nach fallenden Potenzen von t, das heisst nach steigenden Potenzen von z ordnen. An der Stelle $z = 0$ sieht das, zusammenfassend geschrieben, so aus (Punkte ... im Inneren der Summen deuten Glieder $a_{\mu\nu} t^\mu z^\nu$ mit 2 verschiedenen Sorten von Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ an):

$$\begin{aligned}
t^0 &= (t+0)^0 = (t^1 - 0^1) : (t - 0) = t^0\,0^0 \\
t^1 &= (t+0)^1 = (t^2 - 0^2) : (t - 0) = t^1\,0^0 + t^0\,0^1 \\
t^2 &= (t+0)^2 = (t^3 - 0^3) : (t - 0) = t^2\,0^0 + \cdots + t^0\,0^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

2. Aus $f(1/z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu / z^\nu$ folgt $f(1/\infty) = a_0/\infty^0 = a_0$. Bei Verzicht auf die Definition $\infty^0 = 1$ wäre $f(1/\infty) = f(0)$ nicht definiert, es sei denn, man schriebe $f(1/z) = a_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu / z^\nu$.

3. Eine n-reihige oder unendliche Einheitsmatrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{matrix} \right\|$$

schreibt sich in formaler Anlehnung an (1)

$$(0^{|i-k|}) = (1 - \operatorname{sgn}|i-k|)^{1)} = (\infty^{-|i-k|}) \qquad (i, k = 1, \ldots, n \ \text{ oder } \ 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

[1]) Bekanntlich ist $\operatorname{sgn} 1, 2, 3, \ldots = 1$ und $\operatorname{sgn} 0 = 0$ festgesetzt (sgn = Signum = Vorzeichen). Von $\delta_{ik} = \binom{i}{k}\binom{k}{i}$ und zahlreichen anderen Darstellungen sehen wir in diesem Rahmen ab.

Bei der Anwendung des hier benutzten Steuerwald-Symbols $0^{|i-k|}$ ergeben sich die folgenden 2 Möglichkeiten:

a) Man ersetzt die 19lettrige Definition des Kronecker-Symbols

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases}$$

durch die 10lettrige $\delta_{ik} = 0^{|i-k|}$ und schreibt weiterhin wie bisher überall δ_{ik}.

b) Man unterdrückt δ_{ik} (also auch seine Definition) und schreibt nur $0^{|i-k|}$, was wegen (1) nicht gesondert definiert zu werden braucht.

Die Möglichkeit b) erscheint bequemer, obwohl δ_{ik} nur 3 Lettern benutzt, $0^{|i-k|}$ jedoch 6. Denn im Falle b) unterbleiben Sätze wie «wobei wie üblich $\delta_{ik} = 0^{|i-k|}$ das Kronecker-Steuerwald-Symbol ist».

4. Fourier-Reihe $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)/(1+0^\nu)$. Merkwürdigerweise schreibt R. Rothe $f(x) = a_0 + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x)$, was aber doch $= \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}$ ist [*Höhere Mathematik*, II, 2. Aufl. (Leipzig 1931), S. 120].

2. Die Definition $0^0 = 1$ empfiehlt sich zum Beispiel nicht überall in der Theorie der von der Unbestimmten n abhängigen Bernoullischen Polynome $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $\ldots = n$, $n(n+1)/2$, $n(n+1)(2n+1)/6$, $n^2(n+1)^2/4, \ldots$ (Potenzsummen natürlicher Zahlen). Hier wird man, mit ganzem Argument $n \geqq 0$, die Definition

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + \cdots + n^k \qquad (n, k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

aus der sich die Polynomdarstellung gewinnen lässt, der Einfachheit halber etwa durch

$$S_0(0) = 0^0 = 0 \tag{4}$$

vervollständigen. Dann gelten nämlich, wie sich beweisen lässt, neben $S_k(0) = S_0(n) - n = 0$ (das heisst, n ist stets Faktor) auch andere Formeln ausnahmslos, bei $S_0(0) = 0^0 = 1$ jedoch nicht; zum Beispiel:

A. Definiert man für unbestimmte n statt der üblichen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ableitung} & \dfrac{d}{dn} n^{k+1} = (k+1)\, n^k, \\[2ex] \text{eine «Ableitung»} & \dfrac{D}{Dn} n^{k+1} = (k + \operatorname{sgn} k)\, n^k, \\[2ex] \text{so ist} & \dfrac{D}{Dn} S_{k+1}(n) = (k+1)\, S_k(n). \end{array}\right\} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hiernach können $S_1, S_2, S_3, \ldots$ sukzessive durch wiederholte «Integration» von $S_0(n) = n$ bestimmt werden. Die «Integrationskonstante», nämlich das Glied mit n^1, wird dabei aus $S_k(1) = 1$ oder $S_k(-1) = 0$ berechnet (ein Glied mit n^0 tritt ja niemals auf); erstere Formel ist hier nur bei der Potenzsummendarstellung (3), letztere nur bei gewissen Polynomdarstellungen von S_k, zum Beispiel der aus (6), evident. So hat man, mit gewöhnlicher Integration,

$$S_0(n) = n, \quad S_k(n) = k\int_0^n S_{k-1}(\nu)\, d\nu + n\left[1 - k\int_0^1 S_{k-1}(\nu)\, d\nu\right]$$

$$= k\int_0^n S_{k-1}(\nu)\, d\nu + n\left[k\int_0^{-1} S_{k-1}(\nu)\, d\nu\right] \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Die 2. Formel stammt von APPELL, Nouv. Ann. Math. *1887*, 312 ff., sie ist bequemer als die erste. Jede der beiden eckigen Klammern bezeichnet man auch mit $(-1)^k B_k$, wo B_k die k-te Bernoullische Zahl ist:

$$\begin{array}{lcccccc} B_1\ B_2\ B_4\ B_6\ \ldots = & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \ldots, \\ \quad B_3\ B_5\ B_7\ \ldots = & & 0 & 0 & 0 & \ldots . \end{array}$$

Diese Zahlen berechnet man auch unabhängig von (5), zum Beispiel aus der symbolischen binomischen Entwicklung von

$$(B+1)^k - B^k = \delta_{k1} = 0^{k-1} = 1 - \operatorname{sgn}(k-1) \quad \text{mit} \quad B^k = B_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hier kehrt man also zweckmässig wieder zur Definition $0^0 = 1$ aus (1), (2) zurück, so dass $0^0 = 0$ nur im Rahmen von (4) gilt.

B. Für $n+1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ist die k-reihige linke obere Eckdeterminante der unendlichen Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccccc} n^1 & 1 & & & & \\ -n^2 & 1 & 2 & & & \\ n^3 & 1 & 3 & 3 & & \\ -n^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & \\ . & . & . & . & . & . \end{array} \right\| \tag{6}$$

gleich $k!\, S_{k-1}(n) = k!(0^{k-1} + 1^{k-1} + \cdots + n^{k-1})$; die Matrix (6) entsteht dabei aus der bekannten Stifel-Pascalschen

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ . & . & . & . & . & . \end{array} \right\|,$$

wenn in letzterer, für alle k, in Zeile k das Element $\binom{k}{k}$ vor $\binom{k}{0}$ tritt und dort durch $-(-n)^k$ ersetzt wird. Man liest an (6) ab, indem man $n = 0$ und $n = -1$ einsetzt:

Alle $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ sind durch n teilbar.

Alle $\quad S_1, S_2, S_3, \ldots$ sind durch $n+1$ teilbar.

[Vgl. Jber. dtsch. Math.-Ver. *61* (1958).]

3. Seien $x\,(>0)$ und a endliche reelle Zahlen. Mittels der de l'Hospitalschen Regel kann man dem Symbol 0^0 zum Beispiel wie folgt jeden endlichen Wert $e^a > 0$ beilegen:

$$f(x) = (\sin x)^{a/\ln x} \quad \text{mit (Def.)}\ f(0) = \lim_{x\to 0} f(x),$$

falls der Limes existiert. Dann hat man

$$\ln f(0) = \ln \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \ln f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a \ln \sin x}{\ln x} = a \lim_{x\to 0} \frac{\cos x/\sin x}{1/x}$$

$$= a \lim_{x\to 0} \cos x \frac{x}{\sin x} = a \cdot 1 \cdot 1 = a.$$

Der obige Limes existiert also. Das Ergebnis schreiben wir kurz $f(0) = 0^0 = e^a$. Die reelle Zahl $a = 0$ braucht dabei nicht ausgeschlossen zu werden. – Analoges gilt von ∞^0:

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{a/\ln x} \quad \text{mit} \quad f(0) = \infty^0 = e^{-a} > 0$$

($x > 0$ und a beide endlich und reell). – Zum Schluss sei noch an die bekannte unbestimmte Integration

$$\int x^{k-1}\, dx = \frac{x^k}{k} + C$$

erinnert, die für alle ganzen k gilt, wenn man, wiederum ad hoc, $x^0/0 = 0/0 = \ln x$ setzt.

I. Paasche, München

Aufgaben

Aufgabe 288. Sei k ein Kegelschnitt und k' ein ihn doppelt berührender Kreis, P ein laufender Punkt von k und P' einer der beiden Schnittpunkte der zugehörigen Kegelschnittstangente mit dem Kreis k'. Man zeige, dass ein bestimmter Brennstrahl durch P mit dem Kreisdurchmesser durch P' einen Winkel unveränderlicher Grösse bildet.

W. Wunderlich, Wien

Lösung des Aufgabenstellers: Seien U, V die Berührungspunkte von k und k' und W der Pol der Verbindungssehne. Wir betrachten jene ebene Kollineation $\mathfrak{A}$ ($X \to X'$), die U, V, W einzeln festlässt und P nach P' bringt. $\mathfrak{A}$ transformiert k in k', und man sieht leicht, dass auch jeder weitere Punkt Q' von k' auf der Tangente seines entsprechenden Punktes Q liegt. Zu diesem Zwecke ziehe man jene zweite Kollineation $\mathfrak{B}$ mit den Fixpunkten U, V, W heran, die P in Q überführt: $\mathfrak{B}$ transformiert k und daher auch k' in sich. Auf Grund der Vertauschbarkeit von Kollineationen mit demselben Doppeldreieck gilt für den auf der Tangente von Q liegenden Kreispunkt $\mathfrak{B} \cdot P' = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \cdot P = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot P = \mathfrak{A} \cdot Q = Q'$. Das Angabepunktpaar P, P' ist demnach unter den Paaren zugeordneter Punkte von k und k' in keiner Weise ausgezeichnet[1]).

Seien nun I', J' die absoluten Punkte von k' und I, J die ihnen entsprechenden Punkte auf k, deren Tangenten i, j, wie wir nun wissen, durch I', J' gehen, also isotrop sind. Ihr Schnittpunkt F ist mithin ein Brennpunkt von k, und der ihm entsprechende Punkt F' ist als Schnitt der Kreistangenten i', j' in I', J' der Mittelpunkt von k'. Dem Brennstrahlbüschel F von k ist mithin vermöge der Kollineation $\mathfrak{A}$ das Durchmesserbüschel F' von k' zugeordnet, und zwar nicht bloss projektiv, sondern wegen der Zuordnung der isotropen Strahlenpaare i, j und i', j' sogar gleichsinnig-kongruent. Das bedeutet, dass für beliebige Punktepaare X, X' der Kollineation $\mathfrak{A}$ die Strahlen FX und $F'X'$ einen festen Winkel α einschliessen, womit für X auf k die Behauptung erwiesen ist. – Der Ort der Winkelscheitel ist als Erzeugnis der kongruenten Büschel F, F' ein Kreis, der die Fixpunkte U, V, W enthält, ferner die Büschelscheitel F, F' und aus Symmetriegründen auch den zweiten Brennpunkt von k. Fasst man insbesondere diesen als Scheitel von α auf, so folgert man, dass die Hauptachse von k gegen die Gerade FF' unter dem Winkel α geneigt ist.

Der vorliegende Kegelschnittsatz spielt in der Theorie der «Hundekurven mit festem Schielwinkel» eine entscheidende Rolle[2]).

2. Lösung: Les coniques k et k' étant bitangentes, la tangente en P à k découpe sur k' des divisions homographiques qui, de plus forment une involution (2, 2) se décomposant en deux homographies inverses l'une de l'autre. De telle sorte qu'à chaque point P' sur k'

---

[1]) Der Sachverhalt wird anschaulich besonders klar, wenn man sich die Fixpunkte U, V in die absoluten Kreispunkte verlegt denkt: k und k' sind dann konzentrische Kreise, und $\mathfrak{A}$ wird eine Drehstreckung um den gemeinsamen Mittelpunkt W.

[2]) W. Wunderlich, *Über die Hundekurven mit konstantem Schielwinkel*, Mh. Math. *61*, 277–311 (1957).