Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

Determinante den Wert

$$\cos^2\frac{\pi}{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_1-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_2-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_3-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_4\right)$$

$$+\frac{1}{16}\left(\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_3+\cos^2\varphi_2\cos^2\varphi_4\right)-\frac{1}{8}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4$$

hat. Benützt man die aus $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\pi$ folgende Relation

$$2-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_3-\cos^2\varphi_4$$
$$=2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4-2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4,$$

so wird die Determinante gleich

$$f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)=\frac{1}{16}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\cos\varphi_2\cos\varphi_4\right)^2-\frac{1}{4}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4.$$

Ist für das Minimum dieser Funktion ein $\varphi_n=0$ oder $=\pi/2$, so bestätigt man leicht, dass $f\geqq 0$ ist. Sind aber für das Minimum alle $\varphi_n\neq 0$ und $\neq\pi/2$, so muss notwendig $\partial f/\partial\varphi_1=\cdots=\partial f/\partial\varphi_4$ sein. Eine kurze Rechnung ergibt dann wieder $f\geqq 0$. Daher ist die betrachtete quadratische Form stets positiv definit oder semidefinit und somit (3) auch für $n=4$ richtig. Der entsprechende Beweis bei beliebigem n scheint jedoch nicht einfach zu sein.

A. FLORIAN, Graz

Ungelöste Probleme

Nr. 23. H. HOPF[1]) hob als besonders erwähnenswerten Spezialfall eines sich auf Überdeckungen n-dimensionaler geschlossener Riemannscher Mannigfaltigkeiten beziehenden Satzes die folgende Aussage hervor:

A. *Ist die n-dimensionale Sphäre S_n (Randfläche einer $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Kugel) von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen M_i $(i=0,1,\dots,n)$ überdeckt, so lässt sich zu jeder (sphärischen) Distanz a des Intervalls $0<a\leqq\pi$ wenigstens eine Menge M_j $(0\leqq j\leqq n)$ finden, die ein Punktepaar p,q der Distanz $d(p,q)=a$ enthält.*

Damit ist eine Erweiterung des Satzes von LUSTERNIK-SCHNIRELMANN-BORSUK gegeben, der bekanntlich aussagt, dass von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen, welche die Sphäre S_n überdecken, wenigstens eine Menge ein antipodisches Punktepaar aufweisen muss (Sonderfall der Aussage A für $a=\pi$)[2]).

Wie der Wortlaut von Aussage A andeutet, hängt die Menge A_j von der vorgegebenen Distanz a ab, und man muss gewärtigen, dass man A_j auswechseln muss, wenn a verändert wird. Man kann sich die Frage stellen, ob dies in geeigneten Fällen tatsächlich unvermeidbar ist oder ob die folgende schärfere Aussage gilt:

B. *Ist die n-dimensionale Sphäre S_n von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen M_i $(i=0,1,\dots,n)$ überdeckt, so lässt sich wenigstens eine Menge M_j $(0\leqq j\leqq n)$ fin-*

---

[1]) H. HOPF, *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugaliae Math. *4*, 129–139, insbesondere 138 (1944).

[2]) K. BORSUK, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. *20*, 177–190 (1933).

den, die zu jeder Distanz a des Intervalls $0 < a \leqq \pi$ *ein Punktepaar* p, q *der Distanz* $d(p,q) = a$ *enthält.*

Diese Verschärfung wäre eine noch einprägsamere Erweiterung des oben erwähnten Antipodensatzes. Ihre Richtigkeit steht fest für $n = 1$ und $n = 2$; für $n > 2$ fehlt unseres Wissens ein Beweis.

Instruktiv ist vielleicht der einfache Beweis für den Fall $n = 1$. Die Kreislinie S_1 sei also durch die beiden abgeschlossenen Mengen M_i $(i = 0{,}1)$ überdeckt. Wäre Aussage B falsch, so wäre anzunehmen, dass die Punktepaare von M_i die Distanz a_i nicht realisieren. Diese Annahme ist trivialerweise unrichtig, wenn eine der Mengen M_i leer ist. Es sollen also beide nichtleer sein. Da S_1 ein Kontinuum ist, müssen die beiden M_i einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen. Wir wählen nun einen Punkt $p \in M_1 \cap M_0$, und weiter – dem positiven Umlaufssinn folgend – einerseits die drei Punkte p, p', q und andererseits die drei Punkte p, q', q derart, dass $d(p,p') = a_0$, $d(p', q) = a_1$, $d(p, q') = a_1$, $d(q', q) = a_0$ ist. Mit Rücksicht auf die Gegenannahme schliessen wir der Reihe nach einerseits $p \in M_0$, also $p' \in M_1$, also $q \notin M_1$, andererseits $p \in M_1$, also $q' \in M_0$, also $q \notin M_0$. Demnach wäre q nicht überdeckt, so dass der erzielte Widerspruch unsere Gegenannahme zu Fall bringt.

Der zur Verfügung stehende Beweis im Falle $n = 2$[3]) ist nicht besonders kurzweilig und eignet sich nicht für die wünschbare Verallgemeinerung auf $n > 2$.

H. HADWIGER

Nachtrag zu Nr. 2. Nachdem bereits H. G. EGGLESTON die Borsuksche Vermutung im Falle des gewöhnlichen Raumes, das heisst für $n = 3$ bestätigte (vgl. den ersten Nachtrag zu Nr. 2 in Band 10, S. 89)[4]), gelang es nun B. GRÜNBAUM (Jerusalem)[5]), einen einfachen Beweis nach der «Deckelmethode» aufzustellen. Der Borsuksche Satz $D_3 < 1$ wird damit durch $D_3 \leqq 0{,}9887\ldots$ verschärft.

Nachtrag zu Nr. 21. Von W. WUNDERLICH (Wien) und K. STRUBECKER (Karlsruhe) sind uns in freundlicher Weise verschiedene Unterlagen und Literaturangaben zugestellt worden, die belegen, dass über das in Nr. 21 aufgeworfene Problem und über verwandte Fragen der Eiliniengeometrie mehr bekannt ist, als wir bei der Verfassung unseres Beitrages annahmen[6]).

Insbesondere gibt uns Herr W. WUNDERLICH den folgenden interessanten Aufschluss[7]): «Es gibt vom Kreis verschiedene Kurven C, darunter auch konvexe, in welchen sich ein reguläres n-Eck vollständig umwenden lässt. Das einfachste einschlägige Beispiel kann etwa so erklärt werden: Rollt ein Kreis vom Radius n auf einem umschlossenen festen Kreis vom Radius $n - 1$ oder in einem festen Kreis vom Radius $n + 1$, so durchlaufen die Ecken eines mit dem Rollkreis starr verbundenen

[3]) H. HADWIGER, *Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *89*, 211–214 (1944).

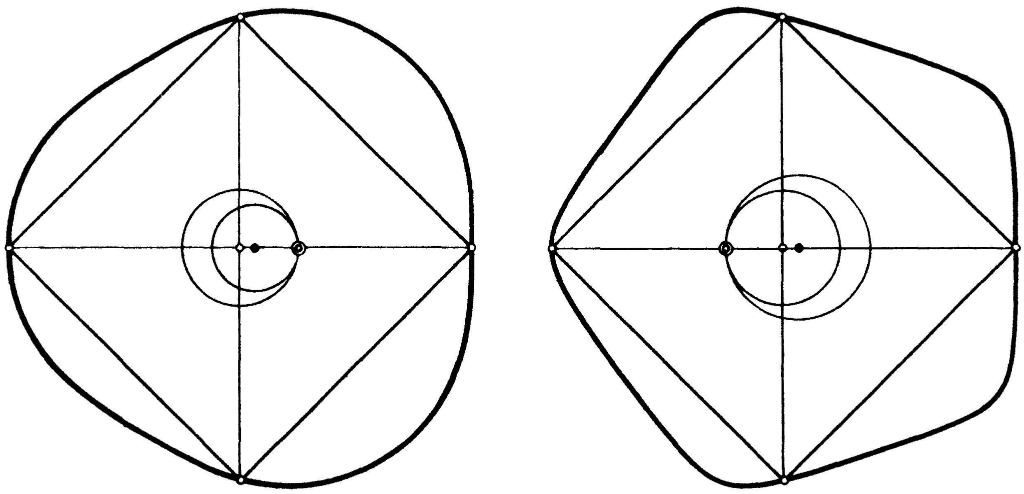
[4]) Vgl. auch die ausführliche Darstellung dieses ersten nach der «Abbildungsmethode» vollzogenen Beweises in dem neu erschienenen Buch: H. G. EGGLESTON, *Problems in Euclidean Space* (Pergamon Press, London, New York, Paris und Los Angeles 1957).

[5]) B. GRÜNBAUM, *A Simple Proof of Borsuk's Conjecture in Three Dimensions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. *53*, 776–778 (1957).

[6]) H. J. FISCHER, *Kurven, in denen ein Drei- oder Vieleck so herumgeführt werden kann, dass seine Ecken die Kurve durchlaufen*, Deutsche Math. *1*, 485–498 (1936). – W. WUNDERLICH, *Über eine Klasse zwangsläufiger höherer Elementenpaare*, Z. angew. Math. Mech. *19*, 177–181 (1939). – K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie des isotropen Raumes*, V.: *Zur Theorie der Eilinien*, Math Z. *51*, 525–573 (1949).

[7]) Auszug aus einem Brief an den Unterzeichneten vom 16. Januar 1958,

konzentrischen n-Ecks dieselbe Bahnkurve, und zwar eine Epitrochoide mit $(n-1)$-zähliger Symmetrie bzw. eine Hypotrochoide mit $(n+1)$-zähliger Symmetrie, wie unschwer zu erkennen ist (vgl. die Figuren für $n=4$). Diese Bahnkurve C fällt konvex aus, wenn der Umkreisradius des n-Ecks $R \geqq n^2$ ist; sie ist im übrigen rationalalgebraisch und hat die Ordnung $2n$. So wie das ganze n-Eck ist natürlich auch jedes von drei Eckpunkten aufgespannte Dreieck in C umwendbar. Ein solches Dreieck ist aber durch die Eigenschaft gekennzeichnet, dass seine Winkel rationale Verhältnisse



aufweisen. – Allgemein lässt sich eine derartige Kurve C in der Gausschen Zahlenebene durch die komplexe Darstellung

$$z = Z(n\,t) + R\,e^{it} \tag{*}$$

beschreiben, wobei $Z(t)$ eine beliebige komplexe, mod 2π periodische Funktion des reellen Parameters t sein kann, die nur beschränkt zu sein braucht. Das oben genannte Beispiel folgt aus der Annahme $Z(t) = \exp(\pm it)$. Die Konvexität von C wird vermutlich durch hinreichend grosse Wahl von R stets zu erzwingen sein.

Die vermutete Kennzeichnung des Kreises als Eilinie, in der sich ein nichtreguläres Dreieck herumführen lässt, ist somit hinfällig. – Offen bleibt allerdings noch die Frage, ob es eine vom Kreis verschiedene Eilinie gibt, in welcher sich ein Dreieck mit nichtrationalen Winkelverhältnissen umwenden lässt. Für gleichschenklige Dreiecke gibt es solche Eilinien tatsächlich nicht, wie Sie ja selbst ausgeführt haben; für ungleichschenklige Dreiecke ist dies aber noch ungewiss.»

Abschliessend wollen wir noch auf die von W. Wunderlich angegebene einfache Darstellung (*) einer allgemeinen Lösung unseres Problems insofern besonders hinweisen, als diese nicht nur für Dreiecke Lösungen liefert, sondern für m-Ecke, die sich regulären n-Ecken einbeschreiben lassen. H. Hadwiger