Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 3

Artikel: Zu einem Satz von P. Erdös
Autor: Florian, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19774

Punkten P_5, P_6, P_7 von ε bzw. korrelativ entsprechenden Geraden p_5', p_6', p_7' von ε' durch den dieser Ebene angehörenden singulären Punkt der Korrelation hindurchgehen. Dieser Punkt muss demnach jedem der beiden Kegelschnitte l und k angehören und daher in einen der drei von P_5' verschiedenen Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte fallen.

Ist umgekehrt S' einer dieser drei Schnittpunkte, so ist in der entsprechenden Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' dem Punkt S' von ε' jeder der drei Punkte P_5, P_6, P_7, die der Voraussetzung nach nicht in einer Geraden liegen, in ε konjugiert. Die Korrelation ist also ausgeartet, und S' ist der der Ebene ε' angehörende singuläre Punkt.

Zu sieben Paaren konjugierter Punkte gibt es also *drei* ausgeartete Korrelationen, und durch sie sind in der bereits angegebenen Weise die *drei Lösungen* des *Problems der Projektivität* gegeben. (Schluss folgt im nächsten Heft.) L. HOFMANN, Wien

Zu einem Satz von P. Erdös

R_1, R_2, R_3 und r_1, r_2, r_3 seien die Abstände der Ecken bzw. Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen inneren Punkt O des Dreiecks. Von P. ERDÖS stammt die Ungleichung[1]) (S. 12)

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(r_1 + r_2 + r_3)\,, \tag{1}$$

in der Gleichheit nur für ein reguläres Dreieck mit dem Mittelpunkt O gilt.

Hier wird allgemeiner für beliebiges k bewiesen ($M_k = k$-tes Potenzmittel):

$$\frac{M_k(R_1, R_2, R_3)}{M_k(r_1, r_2, r_3)} \left.\begin{array}{lll} \geqq 2 & \text{für} & |k| \leqq 1, \\ > 2^{1/|k|} & \text{für} & |k| > 1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Diese Schranken sind genau; Gleichheit kann nur im ersten Fall bestehen und auch dann nur für ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt O.

Offenbar genügt es, den Beweis für $k > 0$ zu liefern. Für negative k ergibt sich das Resultat durch Anwendung der Polarität bezüglich des Einheitskreises um O auf das Dreieck. Für $k = 0$ (M_0 = geometrisches Mittel) erhält man einen Spezialfall eines für beliebige konvexe Polygone bewiesenen Satzes[1]) (S. 33).

Wir verwenden den von FEJES TÓTH[1]) (S. 13) dargestellten, von MORDELL herrührenden Beweis des Satzes von ERDÖS. Dort wird gezeigt

$$R_1 \geqq \frac{r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta}{\sin\alpha}\,.$$

Daraus folgt aber wegen der Konkavität von $f(x) = x^k$ für $0 < k \leqq 1$

$$R_1^k \geqq \frac{2^{k-1}}{\sin^k\alpha}\,(r_2^k \sin^k\gamma + r_3^k \sin^k\beta)$$

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953)

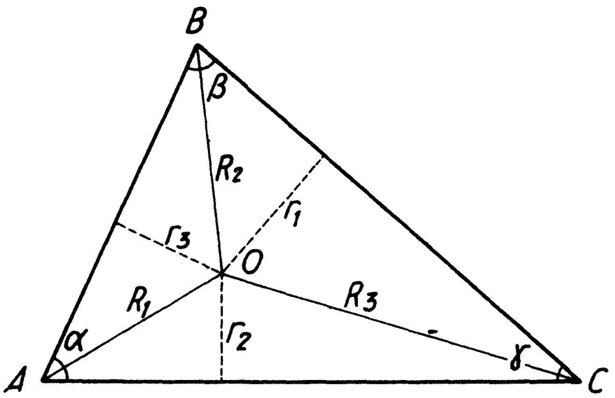
und analog für R_2, R_3. Daher ist

$$R_1^k + R_2^k + R_3^k$$
$$\geqq 2^{k-1}\left[r_1^k\left(\frac{\sin^k\beta}{\sin^k\gamma}+\frac{\sin^k\gamma}{\sin^k\beta}\right)+r_2^k\left(\frac{\sin^k\gamma}{\sin^k\alpha}+\frac{\sin^k\alpha}{\sin^k\gamma}\right)+r_3^k\left(\frac{\sin^k\alpha}{\sin^k\beta}+\frac{\sin^k\beta}{\sin^k\alpha}\right)\right].$$

Da für $x > 0$ stets $x + 1/x \geqq 2$ gilt, ergibt sich

$$R_1^k + R_2^k + R_3^k \geqq 2^k (r_1^k + r_2^k + r_3^k),$$

und Gleichheit besteht nur für ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt O. Dies ist der erste Teil von (2).



Es sei nun $k > 1$. Dann hat man für beliebige $x_1, x_2 > 0$

$$(x_1 + x_2)^k > x_1^k + x_2^k,$$

also ist

$$R_1^k > \frac{r_2^k \sin^k\gamma + r_3^k \sin^k\beta}{\sin^k\alpha}$$

und analog für R_2, R_3; daraus folgt, ähnlich wie oben,

$$R_1^k + R_2^k + R_3^k > 2(r_1^k + r_2^k + r_3^k),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Um einzusehen, dass die Schranke auch in diesem Falle genau ist, braucht man nur die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks bei konstanter Schenkellänge gegen Null und gleichzeitig O gegen die Spitze des Dreiecks konvergieren zu lassen.

Wir geben nun einen weiteren Beweis von (1), der auch (2) liefert und einen Ansatz zum Beweis der folgenden Vermutung darstellt[2]): In Verallgemeinerung von (1) gilt für jedes konvexe n-Eck und jeden inneren Punkt O, wenn R_i die Abstände von den Ecken, r_i die von den Seiten bezeichnen,

$$R_1 + \cdots + R_n \geqq \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}(r_1 + \cdots + r_n). \tag{3}$$

[2]) L. FEJES TÓTH, *Inequalities Concerning Polygons and Polyhedra*, Duke math. J. *15*, 817 (1948).

Der allgemeine Beweis hiefür ist mir nicht gelungen, jedoch werden wir die Vermutung im Falle $n = 4$ bestätigt finden.

Die Verbindungsstrecken R_i, R_{i+1} von O zu zwei aufeinanderfolgenden Eckpunkten des Polygons sollen den Winkel $2\varphi_i$ einschliessen. Dann findet man für den Abstand r_i der zugehörigen Polygonseite von O

$$\left.\begin{array}{l} r_i = \dfrac{R_i R_{i+1} \sin 2\varphi_i}{\sqrt{(R_i - R_{i+1})^2 + 2 R_i R_{i+1}(1-\cos 2\varphi_i)}} \leq \sqrt{R_i R_{i+1}} \cos\varphi_i \\ \left(R_{n+1} \equiv R_1, \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \pi, \quad 0 < \varphi_i < \dfrac{\pi}{2}\right). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Der Ausdruck

$$\cos\frac{\pi}{n}\,(R_1 + \cdots + R_i) - \sum_{n=1}^{n} \sqrt{R_i R_{i+1}} \cos\varphi_i$$

stellt eine quadratische Form in $\sqrt{R_1}, \ldots, \sqrt{R_n}$ dar. Kann man zeigen, dass sie positiv definit oder semidefinit ist, so ist damit wegen (4) auch (3) bewiesen. Gleichheit kann darin nur dann bestehen, wenn $R_1 = R_2 = \cdots = R_n$ ist und die betrachtete Form verschwindet. Letzteres tritt aber wegen der strengen Konkavität von $\cos x$ in $(0, \pi/2)$ nur für $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n$ ein, das heisst, man hat in (3) Gleichheit nur für ein reguläres n-Eck mit dem Mittelpunkt O.

Für $n = 3$ lautet die Koeffizientenmatrix der quadratischen Form

$$\left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_1 & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_3 \\ -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_1 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_2 \\ -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_3 & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_2 & \dfrac{1}{2} \end{array} \right\|.$$

Die Hauptminoren erster und zweiter Ordnung sind ersichtlich positiv. Die ganze Determinante verschwindet unter Berücksichtigung von $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$ identisch, wie eine kleine Rechnung zeigt. Daher ist die Form positiv semidefinit, und damit ist (1) bereits gezeigt. Auf ganz ähnliche Art lässt sich auch (2) beweisen.

Für $n = 4$ sind in der Koeffizientenmatrix der Form

$$\left\| \begin{array}{cccc} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_1 & 0 & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_4 \\ -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_1 & \cos\dfrac{\pi}{4} & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_2 & \cos\dfrac{\pi}{4} & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_3 \\ -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_4 & 0 & -\dfrac{1}{2}\cos\varphi_3 & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\|$$

die Hauptminoren bis zur dritten Ordnung positiv, wie man sofort sieht, während die

Determinante den Wert

$$\cos^2\frac{\pi}{4}\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_1-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_2-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_3-\frac{1}{4}\cos^2\varphi_4\right)$$
$$+\frac{1}{16}(\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_3+\cos^2\varphi_2\cos^2\varphi_4)-\frac{1}{8}\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4$$

hat. Benützt man die aus $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\pi$ folgende Relation

$$2-\cos^2\varphi_1-\cos^2\varphi_2-\cos^2\varphi_3-\cos^2\varphi_4$$
$$=2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4-2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4,$$

so wird die Determinante gleich

$$f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4)=\frac{1}{16}(\cos\varphi_1\cos\varphi_3+\cos\varphi_2\cos\varphi_4)^2-\frac{1}{4}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\sin\varphi_4.$$

Ist für das Minimum dieser Funktion ein $\varphi_n=0$ oder $=\pi/2$, so bestätigt man leicht, dass $f\geqq 0$ ist. Sind aber für das Minimum alle $\varphi_n\neq 0$ und $\neq\pi/2$, so muss notwendig $\partial f/\partial\varphi_1=\cdots=\partial f/\partial\varphi_4$ sein. Eine kurze Rechnung ergibt dann wieder $f\geqq 0$. Daher ist die betrachtete quadratische Form stets positiv definit oder semidefinit und somit (3) auch für $n=4$ richtig. Der entsprechende Beweis bei beliebigem n scheint jedoch nicht einfach zu sein. A. FLORIAN, Graz

Ungelöste Probleme

Nr. 23. H. HOPF[1]) hob als besonders erwähnenswerten Spezialfall eines sich auf Überdeckungen n-dimensionaler geschlossener Riemannscher Mannigfaltigkeiten beziehenden Satzes die folgende Aussage hervor:

A. *Ist die n-dimensionale Sphäre S_n (Randfläche einer $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Kugel) von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen M_i $(i=0,1,\ldots,n)$ überdeckt, so lässt sich zu jeder (sphärischen) Distanz a des Intervalls $0<a\leqq\pi$ wenigstens eine Menge M_j $(0\leqq j\leqq n)$ finden, die ein Punktepaar p,q der Distanz $d(p,q)=a$ enthält.*

Damit ist eine Erweiterung des Satzes von LUSTERNIK-SCHNIRELMANN-BORSUK gegeben, der bekanntlich aussagt, dass von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen, welche die Sphäre S_n überdecken, wenigstens eine Menge ein antipodisches Punktepaar aufweisen muss (Sonderfall der Aussage A für $a=\pi$)[2]).

Wie der Wortlaut von Aussage A andeutet, hängt die Menge A_j von der vorgegebenen Distanz a ab, und man muss gewärtigen, dass man A_j auswechseln muss, wenn a verändert wird. Man kann sich die Frage stellen, ob dies in geeigneten Fällen tatsächlich unvermeidbar ist oder ob die folgende schärfere Aussage gilt:

B. *Ist die n-dimensionale Sphäre S_n von $n+1$ abgeschlossenen Punktmengen M_i $(i=0,1,\ldots,n)$ überdeckt, so lässt sich wenigstens eine Menge M_j $(0\leqq j\leqq n)$ fin-*

---

[1]) H. HOPF, *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugaliae Math. *4*, 129–139, insbesondere 138 (1944).

[2]) K. BORSUK, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. *20*, 177–190 (1933).