Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1958)

Heft: 3

Artikel: Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt

Autor: Hoffmann, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19773

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XIII Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1958

Über eine elementargeometrische Aufgabe, die auf ein klassisches Problem der Geometrie führt

In zwei Ebenen ε und ε', die auch identisch sein können, ist je eine Gruppe von *fünf* Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 bzw. $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5'$ gegeben, wobei je zwei Punkte der beiden Gruppen mit demselben Index einander zugeordnet sein sollen. Wir fragen nun nach zwei Punkten S und S' in den Ebenen ε bzw. ε' von der Eigenschaft, dass das Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der Punkte der ersten Gruppe aus dem Punkt S in der Ebene ε ergibt, kongruent ist dem Strahlenbüschel, das durch Projektion der Punkte der zweiten Gruppe aus dem Punkt S' in der Ebene ε' entsteht, wobei je zwei Strahlen der beiden Büschel, die durch zugeordnete Punkte der beiden Punktegruppen hindurchgehen, einander entsprechen sollen.

Nun sind bekanntlich zwei Strahlenbüschel dann und nur dann kongruent, wenn sie projektiv so aufeinander bezogen sind, dass die isotropen Geraden der beiden Büschel einander entsprechen. Bezeichnen wir also die absoluten Kreispunkte der Ebene ε mit J und K und jene der Ebene ε' mit J' und K', so beinhaltet die oben gestellte Aufgabe die Forderung, dass das Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der *sieben* Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, J, K$ aus dem Punkt S in der Ebene ε ergibt, *projektiv* sei jenem Strahlenbüschel, das sich durch Projektion der *sieben* Punkte $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', J', K'$ in dieser oder in der Anordnung $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', K', J'$ in der Ebene ε' ergibt. Sind die beiden Ebenen ε und ε' identisch und stellen J und J' und K und K' jeweils denselben absoluten Kreispunkt der Ebene $\varepsilon = \varepsilon'$ dar, so sind im ersteren Falle die beiden Strahlenbüschel gleichsinnig und im zweiten Falle ungleichsinnig kongruent.

Die Aufgabe nun, zwei Gruppen von je *sieben* Punkten einer Ebene, die paarweise aufeinander bezogen sind, aus zwei Punkten dieser Ebene durch projektive Strahlenbüschel zu projizieren, stellt ein klassisches Problem der Geometrie dar und wird als das *Problem der Projektivität* bezeichnet[1]).

Liegen die beiden Punktgruppen in verschiedenen Ebenen, so bedeutet dies natürlich keine wesentliche Verallgemeinerung des Problemes.

Wir geben hier zunächst eine einfache Lösung des Problemes der Projektivität und wenden diese dann auf die Durchführung der eingangs gestellten Aufgabe an.

[1]) M. Chasles, Nouv. Ann. Math. *14*, 211 (1855).

Wir gehen von zwei Ebenen ε und ε' aus, legen in diesen projektive Koordinaten, x, y, z bzw. x', y', z' fest und betrachten die bilineare Beziehung

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}\, x\, x' + a_{12}\, x\, y' + a_{13}\, x\, z' \\ & + a_{21}\, y\, x' + a_{22}\, y\, y' + a_{23}\, y\, z' \\ & + a_{31}\, z\, x' + a_{32}\, z\, y' + a_{33}\, z\, z' = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

zwischen den Koordinaten in den beiden Ebenen. Wir setzen dabei voraus, dass die aus den Koeffizienten von (1) gebildete Determinante nicht verschwinde, dass also

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

sei.

Die vermöge (1) zwischen den Ebenen ε und ε' hergestellte geometrische Beziehung bezeichnet man bekanntlich als *Korrelation* und nennt zwei Punkte $P(x,y,z)$ und $P'(x', y', z')$ von ε bzw. ε', deren Koordinaten der Gleichung (1) genügen, *konjugiert.*

Schreibt man (1) in der Form

$$(a_{11}\, x + a_{21}\, y + a_{31}\, z)\, x' + (a_{12}\, x + a_{22}\, y + a_{32}\, z)\, y' + (a_{13}\, x + a_{23}\, y + a_{33}\, z)\, z' = 0\,, \tag{3}$$

so erkennt man, dass wegen (2) ausnahmslos jedem Punkt $P(x,y,z)$ von ε als Gesamtheit der zu P konjugierten Punkte in ε' eine Gerade p' entspricht, wobei die Zuordnung zwischen den Punkten von ε und den Geraden von ε' umkehrbar eindeutig ist.

In völlig analoger Weise entspricht jedem Punkt $P'(x', y', z')$ von ε' als Gesamtheit der zu P' konjugierten Punkte in ε eine Gerade p, wobei die Zuordnung zwischen den Punkten von ε' und den Geraden von ε wieder umkehrbar eindeutig ist. Liegt dabei der Punkt P in ε auf der Geraden p, so geht umgekehrt die Gerade p' in ε' durch den Punkt P' hindurch.

Da schliesslich die Gleichung (1) acht unabhängige Koeffizienten enthält, ist eine Korrelation zwischen zwei Ebenen durch acht Paare von konjugierten Punkten bestimmt.

Wir setzen nun voraus, dass die Determinante Δ verschwinde und vom Range zwei sei.

Die drei Geraden

$$\begin{aligned} a_{11}\, x + a_{21}\, y + a_{31}\, z &= 0, \\ a_{12}\, x + a_{22}\, y + a_{32}\, z &= 0, \\ a_{13}\, x + a_{23}\, y + a_{33}\, z &= 0 \end{aligned}$$

der Ebene ε schneiden sich dann in einem Punkt $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dieser Ebene, und zu diesem Punkt sind, wie man aus (3) erkennt, alle Punkte der Ebene ε' konjugiert.

Nun kann man (1) aber auch in der Form

$$(a_{11}\, x' + a_{12}\, y' + a_{13}\, z')\, x + (a_{21}\, x' + a_{22}\, y' + a_{23}\, z')\, y + (a_{31}\, x' + a_{32}\, y' + a_{33}\, z')\, z = 0 \tag{4}$$

schreiben. Wegen $\Delta = 0$ schneiden sich nun auch die drei Geraden

$$a_{11}\, x' + a_{12}\, y' + a_{13}\, z' = 0,$$

$$a_{21}\, x' + a_{22}\, y' + a_{23}\, z' = 0,$$

$$a_{31}\, x' + a_{32}\, y' + a_{33}\, z' = 0$$

der Ebene ε' in einem Punkt $S'(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ dieser Ebene, und zu diesem Punkt sind, wie man aus (4) erkennt, alle Punkte der Ebene ε konjugiert.

Die Punkte S und S' sind *singuläre Punkte* der Korrelation, die dann als *ausgeartet* bezeichnet wird.

Wie weiter aus (3) ersichtlich ist, entspricht jedem von S' verschiedenen Punkt P' von ε' als Gesamtheit der zu P' konjugierten Punkte in ε eine Gerade p, die durch den Punkt S hindurchgeht. Umgekehrt entspricht wegen (4) jedem von S verschiedenen Punkt P von ε als Gesamtheit der zu P konjugierten Punkte in ε' eine Gerade p', die durch den Punkt S' hindurchgeht. Liegt dabei der Punkt P auf der Geraden p, so geht die Gerade p' durch den Punkt P' hindurch, und zu jedem Punkt von p ist jeder Punkt von p' konjugiert.

Geht man von einer beliebigen Geraden p des Büschels S in ε aus, so entspricht ihr als Ort aller Punkte, die den von S verschiedenen Punkten von p konjugiert sind, in ε' eine Gerade p' des Büschels S'. Die so zwischen den Strahlenbüscheln S und S' hergestellte geometrische Verwandtschaft ist nun, wie man leicht erkennt, eine Projektivität.

Schneidet man nämlich die Büschel S und S' bzw. mit den Fundamentalgeraden $z = 0$ und $z' = 0$ der in den Ebenen ε und ε' festgelegten Koordinatensysteme, so besteht zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte $Q(x, y, 0)$ und $Q'(x', y', 0)$ je zweier entsprechenden Geraden der beiden Büschel S und S' mit den betreffenden Fundamentalgeraden in ε und ε' wegen (1) die bilineare Beziehung

$$a_{11}\, x\, x' + a_{12}\, x\, y' + a_{21}\, y\, x' + a_{22}\, y\, y' = 0.$$

Demnach sind also die Punktreihen Q und Q' und daher auch die Strahlenbüschel S und S' projektiv.

Besteht also zwischen zwei ebenen Systemen ε und ε' eine ausgeartete Korrelation, so gibt es in jeder der beiden Ebenen je einen singulären Punkt S bzw. S', und zwischen den Strahlenbüscheln S und S' besteht eine Projektivität von der Art, dass je zwei konjugierte Punkte der zwei ebenen Systeme entsprechenden Strahlen der beiden Büschel S und S' angehören.

Legt man umgekehrt in zwei Ebenen ε und ε' zwei projektive Strahlenbüschel S und S' fest, so ist damit, wie man leicht erkennt, in eindeutiger Weise eine ausgeartete Korrelation zwischen den beiden Ebenen definiert, für welche je zwei entsprechenden Strahlen der beiden Büschel angehörende Punkte konjugiert sind.

Wie wir gesehen haben, ist eine nichtausgeartete Korrelation zwischen zwei Ebenen durch acht Paare von konjugierten Punkten bestimmt. Da nun die Koeffizienten einer ausgearteten Korrelation der Bedingung $\Delta = 0$ genügen, ist eine *ausgeartete Korrelation* zwischen zwei Ebenen durch *sieben* Paare von konjugierten Punkten bestimmt.

Das Problem der Projektivität beinhaltet nach dem oben Gesagten die Aufgabe, zu sieben gegebenen Paaren von konjugierten Punkten die zugehörigen ausgearteten Korrelationen zu bestimmen. Die Aufgabe hat, wie allgemein bekannt und wir noch des näheren ausführen werden, drei Lösungen, von denen, wie bei jeder Aufgabe dritten Grades, mindestens eine reell sein muss.

Es sollen nun also in den Ebenen ε und ε' je sieben Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ bzw. $P_1', P_2', P_3', P_4', P_5', P_6', P_7'$ gegeben sein[2]), und wir fragen nach den ausgearteten Korrelationen zwischen den beiden Ebenen, für welche je zwei Punkte P_i, P_i' $(i = 1, \ldots, 7)$ konjugiert sind.

Wir legen zunächst in den Ebenen ε und ε' projektive Koordinaten (x, y, z) bzw. (x', y', z') fest, wobei wir in ε die Punkte P_5, P_6, P_7 und analog dazu in ε' die Punkte P_5', P_6', P_7' bzw. als Fundamentalpunkte $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$ der Koordinatensysteme wählen. Die Koordinaten der weiteren Punkte bezeichnen wir dann in der folgenden Weise: $P_i(x_i, y_i, z_i)$; $P_i'(x_i', y_i', z_i')$, $(i = 1, \ldots, 4)$.

Nun sind, wie wir gesehen haben, die Korrelationen zwischen zwei Ebenen durch bilineare Gleichungen zwischen den Koordinaten in diesen Ebenen, durch Gleichungen also von der Form (1) gegeben. Fragen wir nun zunächst nach *allen* unendlich vielen Korrelationen zwischen den Ebenen ε und ε', für welche die sieben Punktepaare (P_i, P_i'), $(i = 1, \ldots, 7)$ Paare konjugierter Punkte darstellen, so ergeben sich, wenn man in (1) der Reihe nach die Koordinaten je zweier konjugierter Punkte P_i und P_i' einsetzt, sieben Gleichungen für die neun Koeffizienten von (1).

So ergibt sich aus dem Punktepaar $P_5(1, 0, 0)$; $P_5'(1, 0, 0)$, dass $a_{11} = 0$, aus dem Punktepaar $P_6(0, 1, 0)$; $P_6'(0, 1, 0)$, dass $a_{22} = 0$ und schliesslich aus dem Punktepaar $P_7(0, 0, 1)$; $P_7'(0, 0, 1)$, dass $a_{33} = 0$ ist.

Setzt man in (1) $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$a_{12}\, x\, y' + a_{13}\, x\, z' + a_{21}\, y\, x' + a_{23}\, y\, z' + a_{31}\, z\, x' + a_{32}\, z\, y' = 0. \tag{5}$$

Durch Heranziehung der vier weiteren Punktepaare (P_1, P_1'), (P_2, P_2'), (P_3, P_3'), (P_4, P_4') ergeben sich nun aus (5) für die restlichen *sechs* Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die *vier* Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
a_{12}\, x_1\, y_1' + a_{13}\, x_1\, z_1' + a_{21}\, y_1\, x_1' + a_{23}\, y_1\, z_1' + a_{31}\, z_1\, x_1' + a_{32}\, z_1\, y_1' = 0,\\
a_{12}\, x_2\, y_2' + a_{13}\, x_2\, z_2' + a_{21}\, y_2\, x_2' + a_{23}\, y_2\, z_2' + a_{31}\, z_2\, x_2' + a_{32}\, z_2\, y_2' = 0,\\
a_{12}\, x_3\, y_3' + a_{13}\, x_3\, z_3' + a_{21}\, y_3\, x_3' + a_{23}\, y_3\, z_3' + a_{31}\, z_3\, x_3' + a_{32}\, z_3\, y_3' = 0,\\
a_{12}\, x_4\, y_4' + a_{13}\, x_4\, z_4' + a_{21}\, y_4\, x_4' + a_{23}\, y_4\, z_4' + a_{31}\, z_4\, x_4' + a_{32}\, z_4\, y_4' = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Wenn wir nun aber zusätzlich einem der in ε gegebenen Punkte P_i, also etwa dem Punkt P_5, in ε' eine beliebige durch P_5' hindurchgehende Gerade p_5' (Figur 1) als korrelativ entsprechend zuordnen, so ist, wie man leicht erkennt, in eindeutiger Weise eine Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' festgelegt.

---

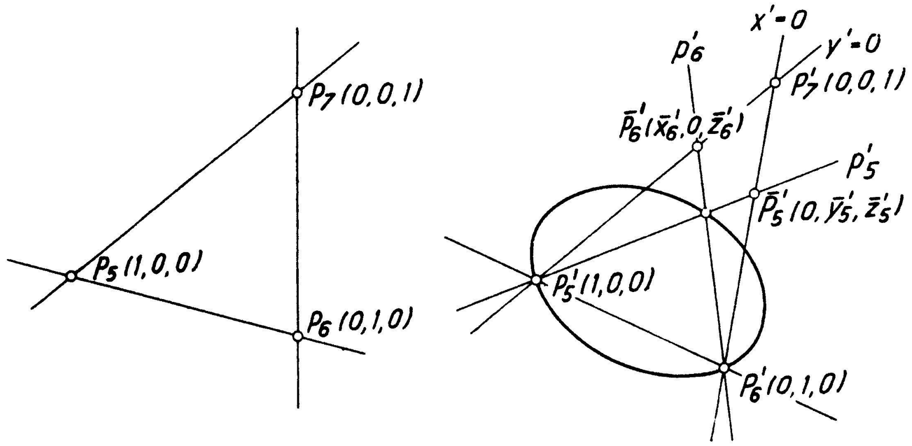
[2]) Wir setzen dabei voraus, dass keine drei in derselben Ebene gegebene Punkte auf einer Geraden liegen.

Der Schnittpunkt $\bar{P}_5'$ der Geraden p_5' mit der Fundamentalgeraden $x' = 0$ des Koordinatensystemes in ε' – wir bezeichnen seine Koordinaten mit $(0, \bar{y}_5', \bar{z}_5')$ – ist nämlich auch zum Punkt P_5 konjugiert, und setzen wir also die Koordinaten der Punkte P_5 und $\bar{P}_5'$ in (5) ein, so ergibt sich für die Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die weitere Gleichung

$$a_{12}\,\bar{y}_5' + a_{13}\,\bar{z}_5' = 0\,. \tag{7}$$

Durch fünf Gleichungen sind diese sechs Koeffizienten aber dem Verhältnis nach bestimmt, und die Korrelation ist somit festgelegt.

Die dann dem Punkt P_6 von ε in der Ebene ε' korrelativ entsprechende Gerade p_6' kann nun sehr leicht bestimmt werden. Der Schnittpunkt $\bar{P}_6'$ dieser Geraden mit der Fundamentalgeraden $y' = 0$ des Koordinatensystems in ε' – wir bezeichnen seine Ko-



Figur 1

ordinaten mit $(\bar{x}_6, 0, \bar{z}_6)$ – ist ja zum Punkt P_6 konjugiert, so dass sich durch Einsetzen der Koordinaten dieser beiden Punkte in (1) die Gleichung

$$a_{21}\,\bar{x}_6' + a_{23}\,\bar{z}_6' = 0 \tag{8}$$

ergibt. Durch (8) ist aber der Punkt $\bar{P}_6'$ und damit auch die Gerade p_6' bestimmt.

Wegen (6), (7) und (8) bestehen nun zwischen den sechs Koeffizienten $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ die sechs linearen homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_{12}\,\bar{y}_5' + a_{13}\,\bar{z}_5' &&= 0\,,\\
&\qquad\qquad a_{21}\,\bar{x}_6' + a_{23}\,\bar{z}_6' &&= 0\,,\\
&a_{12}\,x_1\,y_1' + a_{13}\,x_1\,z_1' + a_{21}\,y_1\,x_1' + a_{23}\,y_1\,z_1' + a_{31}\,z_1\,x_1' + a_{32}\,z_1\,y_1' &&= 0\,,\\
&a_{12}\,x_2\,y_2' + a_{13}\,x_2\,z_2' + a_{21}\,y_2\,x_2' + a_{23}\,y_2\,z_2' + a_{31}\,z_2\,x_2' + a_{32}\,z_2\,y_2' &&= 0\,,\\
&a_{12}\,x_3\,y_3' + a_{13}\,x_3\,z_3' + a_{21}\,y_3\,x_3' + a_{23}\,y_3\,z_3' + a_{31}\,z_3\,x_3' + a_{32}\,z_3\,y_3' &&= 0\,,\\
&a_{12}\,x_4\,y_4' + a_{13}\,x_4\,z_4' + a_{21}\,y_4\,x_4' + a_{23}\,y_4\,z_4' + a_{31}\,z_4\,x_4' + a_{32}\,z_4\,y_4' &&= 0\,,
\end{aligned}$$

und eliminiert man aus diesem Gleichungssystem diese sechs Koeffizienten, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \bar{y}_5' & \bar{z}_5' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{x}_6' & \bar{z}_6' & 0 & 0 \\ x_1 y_1' & x_1 z_1' & y_1 x_1' & y_1 z_1' & z_1 x_1' & z_1 y_1' \\ x_2 y_2' & x_2 z_2' & y_2 x_2' & y_2 z_2' & z_2 x_2' & z_2 y_2' \\ x_3 y_3' & x_3 z_3' & y_3 x_3' & y_3 z_3' & z_3 x_3' & z_3 y_3' \\ x_4 y_4' & x_4 z_4' & y_4 x_4' & y_4 z_4' & z_4 x_4' & z_4 y_4' \end{vmatrix} = 0 .$$

Sie stellt, wie man durch Entwicklung der Determinante unmittelbar erkennt, eine *bilineare* Beziehung zwischen den Koordinaten $\bar{y}_5'$, $\bar{z}_5'$ des Punktes $\bar{P}_5'$ auf der Geraden $x' = 0$ und den Koordinaten $\bar{y}_6'$, $\bar{z}_6'$ des Punktes $\bar{P}_6'$ auf der Geraden $y' = 0$ dar. Wir schreiben sie kurz in der Form

$$(A\,\bar{y}_5' + B\,\bar{z}_5')\,\bar{x}_6' + (C\,\bar{y}_5' + D\,\bar{z}_5')\,\bar{z}_6' = 0, \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten A, B, C, D lediglich die Koordinaten der gegebenen Punkte enthalten.

Ordnet man dem Punkt P_5 von ε eine beliebige durch den Punkt P_5' hindurchgehende Gerade p_5' von ε' korrelativ zu, so ist damit, wie wir gesehen haben, in eindeutiger Weise eine zu den sieben Paaren konjugierter Punkte (P_i, P_i'), $(i = 1, \ldots, 7)$ gehörende Korrelation zwischen den beiden Ebenen ε und ε' bestimmt. Lässt man die Gerade p_5' in ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_5' durchlaufen, so ergeben sich alle diese Korrelationen, zu denen natürlich auch die ausgearteten gehören.

Beschreibt die Gerade p_5' in der Ebene ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_5', so beschreibt die dem Punkt P_6 von ε jeweils korrelativ entsprechende Gerade p_6' in ε' das Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_6'. Nun sind die von diesen beiden Büscheln bzw. auf den Geraden $x' = 0$ und $y' = 0$ in der Ebene ε' ausgeschnittenen Punktreihen $\bar{P}_5'$ und $\bar{P}_6'$ wegen (9) projektiv, so dass also auch die beiden Strahlenbüschel selbst projektiv sind. Die beiden Büschel erzeugen demnach einen Kegelschnitt 1, der durch die beiden Punkte P_5' und P_6' hindurchgeht.

Natürlich besteht zwischen *je zwei* der Punktepaare (P_i, P_i'), $(i = 1, \ldots, 7)$ ein dem hier zwischen den Punktepaaren (P_5, P_5') und (P_6, P_6') dargelegten vollkommen analoger Sachverhalt. So ist in jeder duich beliebige Wahl der Geraden p_5' als Strahl des Büschels P_5' zwischen den Ebenen ε und ε' festgelegten Korrelation dem Punkt P_7 von ε eine Gerade p_7' durch den Punkt P_7' in ε' korrelativ zugeordnet, und beschreibt die Gerade p_5' in ε' das Strahlenbüschel P_5', so beschreibt die Gerade p_7' ein zu diesem projektives Strahlenbüschel mit dem Scheitel P_7'. Das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ist demnach ein Kegelschnitt k, der durch die Punkte P_5' und P_7' hindurchgeht.

Bei jeder zu den sieben Paaren konjugierter Punkte (P_i, P_i'), $(i = 1, \ldots, 7)$ gehörenden *ausgearteten* Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' müssen nun die den

Punkten P_5, P_6, P_7 von ε bzw. korrelativ entsprechenden Geraden p_5', p_6', p_7' von ε' durch den dieser Ebene angehörenden singulären Punkt der Korrelation hindurchgehen. Dieser Punkt muss demnach jedem der beiden Kegelschnitte l und k angehören und daher in einen der drei von P_5' verschiedenen Schnittpunkte dieser beiden Kegelschnitte fallen.

Ist umgekehrt S' einer dieser drei Schnittpunkte, so ist in der entsprechenden Korrelation zwischen den Ebenen ε und ε' dem Punkt S' von ε' jeder der drei Punkte P_5, P_6, P_7, die der Voraussetzung nach nicht in einer Geraden liegen, in ε konjugiert. Die Korrelation ist also ausgeartet, und S' ist der der Ebene ε' angehörende singuläre Punkt.

Zu sieben Paaren konjugierter Punkte gibt es also *drei* ausgeartete Korrelationen, und durch sie sind in der bereits angegebenen Weise die *drei Lösungen* des *Problems der Projektivität* gegeben. (Schluss folgt im nächsten Heft.) L. HOFMANN, Wien

Zu einem Satz von P. Erdös

R_1, R_2, R_3 und r_1, r_2, r_3 seien die Abstände der Ecken bzw. Seiten eines Dreiecks von einem beliebigen inneren Punkt O des Dreiecks. Von P. ERDÖS stammt die Ungleichung[1]) (S. 12)

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(r_1 + r_2 + r_3)\,, \tag{1}$$

in der Gleichheit nur für ein reguläres Dreieck mit dem Mittelpunkt O gilt.

Hier wird allgemeiner für beliebiges k bewiesen ($M_k = k$-tes Potenzmittel):

$$\frac{M_k(R_1, R_2, R_3)}{M_k(r_1, r_2, r_3)} \left.\begin{array}{ll} \geqq 2 & \text{für} \quad |k| \leqq 1, \\ > 2^{1/|k|} & \text{für} \quad |k| > 1. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Diese Schranken sind genau; Gleichheit kann nur im ersten Fall bestehen und auch dann nur für ein gleichseitiges Dreieck mit dem Mittelpunkt O.

Offenbar genügt es, den Beweis für $k > 0$ zu liefern. Für negative k ergibt sich das Resultat durch Anwendung der Polarität bezüglich des Einheitskreises um O auf das Dreieck. Für $k = 0$ (M_0 = geometrisches Mittel) erhält man einen Spezialfall eines für beliebige konvexe Polygone bewiesenen Satzes[1]) (S. 33).

Wir verwenden den von FEJES TÓTH[1]) (S. 13) dargestellten, von MORDELL herrührenden Beweis des Satzes von ERDÖS. Dort wird gezeigt

$$R_1 \geqq \frac{r_2 \sin\gamma + r_3 \sin\beta}{\sin\alpha}\,.$$

Daraus folgt aber wegen der Konkavität von $f(x) = x^k$ für $0 < k \leqq 1$

$$R_1^k \geqq \frac{2^{k-1}}{\sin^k\alpha}\,(r_2^k \sin^k\gamma + r_3^k \sin^k\beta)$$

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953)