Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

des obigen Verfahrens auf

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sinh^k x \cosh^{n-k} x .$$

H. GRÖMER, Wien

Anmerkung der Redaktion: Ähnliche Herleitungen findet man in dem Buche von TH. VAHLEN, *Konstruktionen und Approximationen* (Verlag Teubner, 1911), S. 256f.

Aufgaben

Aufgabe 283. Wir betrachten einen ebenen Bereich B, begrenzt durch die geschlossene Kurve C. Eine Linie ohne Doppelpunkte, welche zwei Punkte von C verbindet und innerhalb B verläuft, heisst ein *Bisektor* von B, wenn sie B in zwei inhaltsgleiche Teile teilt. Ein Bisektor heisst *kürzester Bisektor* von B, wenn es keinen Bisektor von geringerer Länge in B gibt (vgl. des Aufgabenstellers *Mathematics and Plausible Reasoning*, Bd. 1, S. 185–186, Aufgaben 27–33). Man beweise:

Bei gegebenem Flächeninhalt wird der kürzeste Bisektor Maximum (also ein «maximum minimorum» oder «Maximin»):

1. für das gleichseitige Dreieck unter allen Dreiecken,
2. für das Quadrat unter allen Parallelogrammen,
3. *nicht* für das Quadrat unter allen Vierecken,
4. für den Kreis unter allen zentralsymmetrischen Bereichen. (Ob der Satz unter 4. richtig bleibt, wenn das Wort «zentralsymmetrisch» gestrichen wird, ist eine offene Frage.)

G. PÓLYA, Palo Alto, California, USA

Lösung (nach Angaben des Aufgabenstellers): Es bedeute F den Flächeninhalt von B und k die Länge des kürzesten Bisektors.

1. Ist ein Winkel $XOY < 180°$ gegeben und soll ein Punkt X des einen Schenkels mit einem Punkt Y des anderen Schenkels durch eine Linie so verbunden werden, dass die Fläche des Bereiches XOY einen vorgeschriebenen Wert W hat und gleichzeitig die Verbindungslinie XY möglichst kurz ist, so muss XY ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt O sein (vgl. *Mathematics and Plausible Reasoning*, Band 1 (MPR), S. 269, Nr. 16–19). Der Beweis beruht darauf, dass der Umfang eines Kreises kürzer ist als derjenige irgendeiner andern geschlossenen Kurve mit demselben Flächeninhalt. Somit kann die kürzeste Verbindungslinie XY nur ein Kreisbogen sein. Dass das Zentrum in O liegen muss, erkennt man durch Spiegelung von OX bzw. OY an OY bzw. OX. Die die Fläche $2W$ abgrenzende, aus zwei Kreisbogen bestehende Linie muss im Fall der minimalen Verbindung XY selbst ein Kreisbogen sein, so dass der Kreisbogen XY die Schenkel des Winkels in X und Y rechtwinklig schneidet.

Hieraus folgt für ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ (Bogenmass!)

$$k^2 = F \operatorname{Min}(\alpha, \beta, \gamma) \leqq \frac{\pi}{3} F ,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für das gleichseitige Dreieck gilt.

2. Hat B ein Symmetriezentrum Z, so ist der kürzeste Bisektor eine Strecke (vgl. MPR, S. 272, Nr. 33). Aus einem bogenförmigen Bisektor XY ergibt sich nämlich durch Spiegelung an Z der Bisektor $X'Y'$. XY und $X'Y'$ schneiden sich in den symmetrischen Punkten P, P'. (Zwei Bisektoren eines Bereichs müssen notwendig einen gemeinsamen Punkt haben!) Ist $XPP'Y$ die Reihenfolge der Punkte auf XY und $PY' \leqq PX$, so gilt $Y'Y < Y'PY \leqq XY$. Der «Durchmesser» YY' ist also ein kürzerer Bisektor als XY.

Im Parallelogramm mit den Seiten a, b und den entsprechenden Höhen h_a, h_b sei $h_b \leqq h_a$, $a \leqq b$, so dass $k = h_b$. Wegen $h_b \leqq b$ ergibt sich

$$k^2 \leqq b\, h_b = F .$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $h_b = b$, und $F = b^2$ zeigt wegen $a \leqq b$, dass B ein Quadrat ist.

3. Ein Gegenbeispiel ist das gleichseitige Dreieck, das als degeneriertes Viereck aufgefasst werden kann. Es gilt

$$k^2_{Quadrat} = F < \frac{\pi}{3} F = k^2_{gleichs.\,Dreieck}.$$

4. Um das Zentrum Z des zentralsymmetrischen Bereiches B als Mittelpunkt werde der Kreis mit der Fläche F beschrieben. Ist B kein Kreis, so muss ein Randpunkt X von B innerhalb des Kreises liegen. Ist X^* der zu X bezüglich Z symmetrische Punkt, so ist XX^* ein Bisektor von B, der kürzer als der Kreisdurchmesser ist. Somit ist der kürzeste Bisektor von B kleiner als die kürzesten Bisektoren des Kreises, die nach dem in 2. erwähnten Satz die Durchmesser sind.

Aufgabe 284. Eine Punktmenge M im n-dimensionalen Raum sei durch endlich viele Ungleichungen $L_i(x) \geqq 0$ definiert, wobei jedes $L_i(x)$ ein lineares Polynom in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ ist. Die Menge habe innere Punkte. Eine Seite von M wird dadurch definiert, dass in einigen von den Ungleichungen das Zeichen $\geqq$ durch $=$ ersetzt und in den übrigen das Zeichen $\geqq$ beibehalten wird. Eine $(n-1)$-dimensionale Seite heisse eine *Wand*. Auf einer Wand W_k kann, von konstanten Faktoren abgesehen, nur eine Gleichung $L_i = 0$ gelten. Zu den Wänden $W_1, \ldots, W_m$ mögen die Gleichungen $L_1 = 0, \ldots, L_m = 0$ gehören. Behauptung: Die Ungleichungen $L_1 \geqq 0, \ldots, L_m \geqq 0$ definieren die Punktmenge M. Diese Behauptung ist möglichst einfach zu beweisen.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich

Beweis: Es ist zu zeigen, dass für einen beliebigen Punkt x, für den $L_i(x) \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ gilt, die übrigen Bedingungen $L_h(x) \geqq 0$, $h > m$, ebenfalls erfüllt sind. Wir beweisen zunächst den folgenden

Hilfssatz: Es gelte für einen Punkt x

$$L_1(x) > 0, \ L_2(x) > 0, \ \ldots, \ L_m(x) > 0. \tag{1}$$

Dann kann für kein $h > m$ $L_h(x) = 0$ sein.

Würden nämlich für einen Punkt x_0 die Relationen (1) und dazu für ein bestimmtes $h > m$ $L_h(x_0) = 0$ gelten, so würde es infolge der Stetigkeit auf der durch $L_h(x) = 0$ definierten $(n-1)$-dimensionalen Fläche eine Umgebung um den Punkt x_0 geben, so dass alle Punkte dieser Umgebung die Relationen (1) [und dazu $L_h(x) = 0$] erfüllen würden. Es würde also auf einer weiteren Wand W_h die Gleichung $L_h(x) = 0$ gelten, entgegen unserer Annahme.

Aus unserem Hilfssatz und aus der Stetigkeit folgt, dass alle Punkte x, welche die Relationen (1) erfüllen, auch jede weitere Ungleichung $L_h(x) > 0$ mit $h > m$ befriedigen. Entweder gilt nämlich für alle x, die die Relationen (1) erfüllen, $L_h(x) > 0$ oder $L_h(x) < 0$, andernfalls müsste wegen der Stetigkeit für einen bestimmten Punkt x_0 $L_h(x_0) = 0$ gelten, was nach dem Hilfssatz ausgeschlossen ist. Nach Voraussetzung gibt es innere Punkte, das heisst Punkte, die jede Ungleichung $L_i(x) > 0$ befriedigen. Deshalb kommt für sämtliche Punkte x, die (1) erfüllen, für jedes $h > m$ nur die Ungleichung $L_h(x) > 0$ in Frage.

Aus der Stetigkeit folgt weiter, dass für alle Punkte x, für die

$$L_1(x) \geqq 0, \quad L_2(x) \geqq 0, \ \ldots, \ L_m(x) \geqq 0 \tag{2}$$

gelten, für jedes $h > m$ die Beziehung $L_h(x) \geqq 0$ gilt. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

H. MEILI, Winterthur

Bemerkung des Aufgabenstellers: Die am Schluss der obigen Lösung nicht ganz ausgeführte Stetigkeitsbetrachtung kann etwa so ergänzt werden: Es sei y ein Punkt, der alle Ungleichungen $L_i(y) > 0$ befriedigt, und z ein Punkt, in dem die Ungleichungen (2) gelten. Verbindet man dann die Punkte y und z durch eine Strecke $x = y + \lambda (z - y)$,

$0 < \lambda < 1$, so gelten für jeden inneren Punkt x der Strecke die Ungleichungen (1). Nach dem Bewiesenen folgt daraus $L_k(x) > 0$ für alle h. Lässt man nun λ gegen 1 streben, so strebt x gegen z, also folgt $L_k(z) \geqq 0$ für alle h.

Aufgabe 285. Man bestimme für jede natürliche Zahl n die höchste Potenz von 2, die in

$$s_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

aufgeht. A. BAGER, Hjørring

Lösung: $2^{\nu(n)}$ sei die höchste in s_n aufgehende Potenz von 2.
a) Ist n nicht durch 3 teilbar, so gilt $\nu(n) = n - 1$.
b) Ist $n = 3m$ und 2^μ die höchste in m aufgehende Potenz von 2, so gilt $\nu(n) = n$, wenn m ungerade ist und $\nu(n) = n + \mu + 1$, wenn m gerade ist.
Zum Beweis bemerken wir, dass

$$s_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right\}$$

gilt. Ist $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ die n-te Fibonaccische Zahl, so gilt die Binetsche Formel

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}} \left\{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right\} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

und daher $s_n = 2^{n-1} f_n$. Aus der Rekursionsformel für die Fibonaccischen Zahlen folgt aber sofort, dass f_n dann und nur dann gerade ist, wenn n durch 3 teilbar ist. Damit ist Behauptung a) bewiesen.

Ist $n = 3m$, so wird

$$s_{3m} = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{5}} \left\{(2+\sqrt{5})^m - (2-\sqrt{5})^m\right\}.$$

Entwickeln wir nach dem binomischen Lehrsatz und fassen entsprechende Glieder zusammen, so tritt in der geschweiften Klammer – je nachdem m ungerade oder gerade ist – ein Glied $2(\sqrt{5})^m$ bzw. $2^2 m (\sqrt{5})^{m-1}$ auf, und alle übrigen Glieder sind durch höhere Potenzen von 2 teilbar. Im ersten Fall ist das klar, im zweiten folgt es daraus, dass diese übrigen Glieder die Gestalt $2\binom{m}{2k+1} 2^{2k+1} (\sqrt{5})^{m-2k-1}$ $(k > 0)$ haben und die höchste in $(2k+1)!$ aufgehende Potenz von 2 kleiner als 2^{2k} ist. Daraus folgt dann aber die Behauptung b). J. PIEHLER, Leuna

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. CARLITZ (Durham, N.C., USA), K. GRÜN (Steyr), R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 286. Gegeben ist ein Kreis, zwei seiner Punkte A und B und ein Durchmesser POQ. Man soll auf dem Kreis einen Punkt S bestimmen, derart, dass SA und SB den Durchmesser POQ in zwei zum Mittelpunkt O symmetrisch gelegenen Punkten E und F schneiden. R. SPRANCK, Luxemburg

Lösung: Die Aufgabe kann dahin verallgemeinert werden, dass POQ eine beliebige Sehne mit O als Mittelpunkt darstellt. Es sei R der bezüglich O symmetrische Punkt zu A. Verbindet man R mit F, so ist RF parallel SA, wenn $\overline{EO} = \overline{OF}$ ist. Also ist $\sphericalangle RFS = \alpha$, wenn α der über dem Bogen AB stehende bekannte Peripheriewinkel ASB ist. Daraus ergibt sich $\sphericalangle BFR = 180° - \alpha$. F liegt daher auf dem Kreis, der BR als Sehne und $180° - \alpha$ als Peripheriewinkel fasst. Damit ist F und auch S bestimmt. 2 Lösungen.

H. SCHARFF, Kaiserslautern

Die Aufgabe ist nicht lösbar, wenn A und B auf verschiedenen Seiten von PQ liegen. Eine weitere sehr einfache Lösung teilte L. KIEFFER (Luxemburg) mit: Man fasse SE, SF bzw. SP, SQ als entsprechende Elemente einer hyperbolischen Strahleninvolution auf. Der eine Doppelstrahl ist SO, er schneide den Kreis in T. Der andere Doppelstrahl ist die Parallele zu PQ durch S, welche den Kreis in T' schneiden möge. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte (A, B), (P, Q), (T, T), (T', T'), ... der entstehenden Involution auf dem Kreis schneiden sich bekanntlich im «Pol» R der Involution. Man erhält also eine Lösung $S = S_1$, indem man vom Schnittpunkt R von AB und PQ die Tangente RT an den Kreis legt und TO mit dem Kreis zum Schnitt bringt. Die zweite Tangente RT' liefert die zweite Lösung $S = S_2$. Diese Konstruktion ist affin invariant und erlaubt die Lösung der Aufgabe für die Ellipse. G. N. VLAHAVAS (London) weist darauf hin, dass die Aufgabe mit Verallgemeinerungen schon in den *Exercices de Géométrie* von F. G.-M. (Paris 1907), S. 380, vorkommt.

Weitere Lösungen sandten J. BINZ (Bern), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), K. GRÜN (Steyr), A. HESS (Dietikon), J. LANGR (Prag), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (Zuoz), J. SCHOPP (Budapest), A. SCHWARZ (Seuzach), R. WHITEHEAD (Camborne, England).

Aufgabe 287. Prove that the number of odd binomial coefficients of any order is a power of 2. LEO MOSER, Edmonton (Kanada)

Lösung: Die Anzahl der ungeraden Koeffizienten $\binom{n}{k}$ sei $f(n)$. Wir zeigen

$$a)\ f(2n) = f(n); \qquad b)\ f(2n+1) = 2f(n).$$

Da sich jede natürliche Zahl aus der Eins durch eine Folge von Substitutionen $n \to 2n$ oder $2n \to 2n+1$ erhalten lässt, ist dann wegen $f(1) = f(2) = 2$ schon alles bewiesen.

a) folgt aus der Formel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = \sum a_i^2 + 2\sum a_i a_k,$$

angewendet auf das Quadrat $(a+b)^{2n} = [(a+b)^n]^2$. b) ergibt sich daraus, dass in $(a+b)^{2n}$, wieder nach der erwähnten Formel, zwei benachbarte Koeffizienten nie gleichzeitig ungerade sind, so dass bei der Multiplikation von $(a+b)^{2n}$ mit $a+b$ $f(2n) + f(2n)$ ungerade Koeffizienten entstehen. Dieselben Rekursionsformeln zeigen auch, dass $f(n) = 2^e$, wenn e die Anzahl der Einsen in der Darstellung von n im Dualsystem ist. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Bezeichnet man im Pascalschen Dreieck die ungeraden Glieder mit u, die geraden mit g, so ergibt sich, worauf verschiedene Löser hingewiesen haben, folgende Gesetzmässigkeit: Setzen wir voraus, dass sämtliche Glieder der m-ten Reihe u sind, was für $m = 1, 2, 4, 8$ zutrifft. Dann sind nach dem Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks ausser den beiden Randgliedern sämtliche Glieder der $(m+1)$-ten Reihe g. In den folgenden Reihen einschliesslich der $2m$-ten Reihe sind alle Glieder u, die auf der vom linken Randglied der $(m+1)$-ten Reihe ausgehenden Parallelen zur rechten Dreiecksseite liegen. So entsteht ein Teildreieck, welches mit dem aus den ersten m Reihen gebildeten Dreieck identisch ist. Auch rechts entsteht dasselbe Teildreieck, während die übrigen Glieder dieser m Reihen g sind. Somit sind erstmals wieder in der $2m$-ten Reihe alle Glieder u, so dass $m = 2^e$. In der $(2^e + k)$-ten Reihe gibt es für $1 \leq k \leq 2^e$ also doppelt soviel Glieder u wie in der k-ten Reihe, woraus sich die Behauptung durch Induktion ergibt.

L. CARLITZ (Durham N.C., USA) bestimmt die Anzahl der $\binom{n}{k}$, die zur Primzahl p prim sind. Ihre Anzahl ist $(a_0+1) \cdots (a_r+1)$, wenn

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i \quad (0 \leq a_i < p).$$

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), H. DEBRUNNER (Bern), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur), I. PAASCHE (Stockdorf, Deutschland), G. RÉVÉSZ (Budapest), J. SCHOPP (Budapest), P. STOLL (Bolligen).

Neue Aufgaben

321. Dans un tétraèdre, si l'on prolonge les arêtes issues d'un même sommet de k fois leurs longueurs au-delà des faces opposées, k étant un nombre entier, le rapport de la somme des puissances de chacun des douze points obtenus par rapport à la sphère décrite sur l'arête opposée à celle sur laquelle il est situé, comme diamètre, et de la somme des carrés des arêtes, est une somme de deux carrés consécutifs.

V. THEBAULT, Tennie, Sarthe (France)

322. Es sei $D_n = |a_{ik}|$ die Determinante n-ten Grades, in der das allgemeine Element a_{ik} das kleinste gemeinsame Vielfache von i und k ist. Man beweise, dass

$$D_n = n! \prod_{p \leqq n} (1-p)^{[n/p]},$$

wo das Produkt über alle Primzahlen $p \leqq n$ erstreckt wird und $[\alpha]$ die grösste ganze Zahl $\leqq \alpha$ bedeutet.

P. TURÁN, Budapest

323. Drei durch denselben Punkt O gehende Kreise $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ vom gleichen Halbmesser r mögen sich in drei weiteren Punkten P_{12}, P_{23}, P_{31} schneiden. Es ist zu zeigen, dass der Kreis $\mathfrak{K}$ durch diese drei Punkte zu den gegebenen Kreisen kongruent ist.

H. HEINRICH, Dresden

324. Man bestimme das Maximum des Umfanges eines der Einheitskugel einbeschriebenen rechtwinkligen windschiefen Fünfecks.

E. TROST, Zürich

325. Es sei $a_i = 2$ oder $a_i = 3$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Man beweise, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}$$

nur dann rational sein kann, wenn die Folge a_i periodisch ist.

P. ERDÖS, Toronto

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. a) Man berechne das Volumen einer zentrisch-konisch durchbohrten Kugel.

▶ Rotiert ein Kreissegment mit der Sehne s um den zur Sehne parallelen Durchmesser, so ist das Volumen der erzeugten Kugelrinde

$$\frac{s^3 \pi}{6} = 2 \pi \eta f,$$

wo f die Fläche des Segments und η den Abstand seines Schwerpunkts vom Kreismittelpunkt bedeutet. Nun wird der Durchmesser, um den die Rotation erfolgt, um den Winkel α gedreht, jedoch so, dass er das Segment nicht schneidet. α ist gleich dem halben Öffnungswinkel der konischen Bohrung. Das neue Volumen wird

$$V = 2 \pi \eta' f,$$

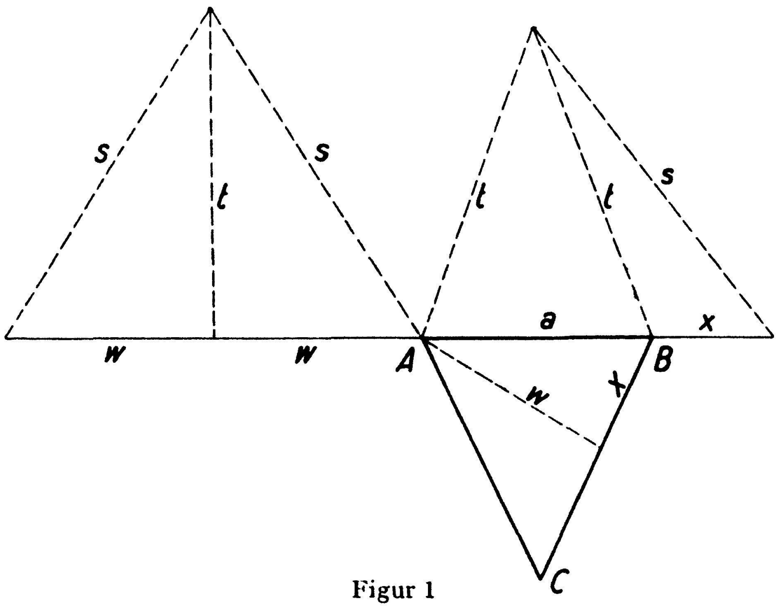
wo der neue Schwerpunktsabstand $\eta' = \eta \cos\alpha$ ist. Somit gilt

$$V = \frac{s^3 \pi}{6} \cos\alpha.$$

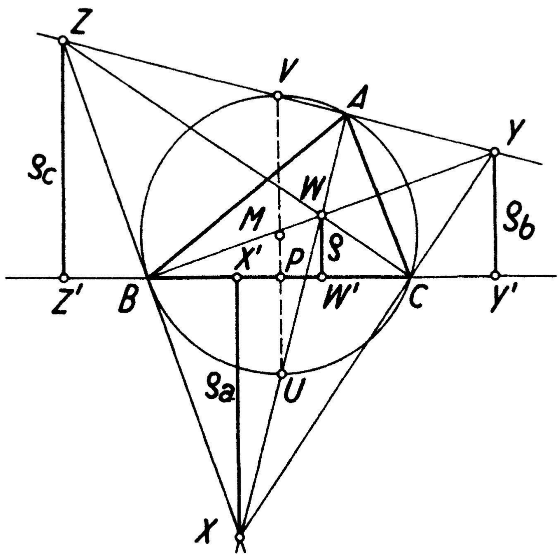
b) Ein rechtwinkliges Dreieck ABC rotiert mit seinem Umkreis (M) um die Hypotenuse AB. Die beiden durch die Katheten bestimmten Kreissegmente erzeugen je einen Rotationskörper. Für welchen Winkel $\angle BMC = \delta$ ist das Verhältnis ihrer Volumen gleich n?

▶ $\operatorname{ctg} \delta/2 = \sqrt[3]{n}$.

2. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck aus der Basis a und der Winkelhalbierenden w eines Basiswinkels konstruiert werden. Zeige, dass die folgende einfache Konstruk-



Figur 1



Figur 2

tion richtig ist. (s ist eine beliebige, genügend lange Strecke; gestrichelt Gezeichnetes dient lediglich dem Verständnis.)

▶ Beide Winkelhalbierenden bestimmen ein gleichschenkliges Trapez mit den Parallelen a und x, dessen beide Schenkel ebenfalls gleich x sind. Der Satz von PTOLEMÄUS liefert für die Strecke x die Gleichung

$$w^2 = x^2 + a\,x\,.$$

3. Man beweise die in jedem Dreieck gültige Formel

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4\,r\,.$$

▸ X, Y, Z, W seien die Mittelpunkte der Ankreise und des Inkreises für das Dreieck ABC, X', Y', Z', W' ihre Projektionen auf BC. UV sei der zu BC senkrechte Durchmesser des Umkreises.

Nun ist

$$Z'B = CY' = s - a, \text{ also } P \text{ Mitte von } Z'Y',$$

$$BX' = W'C = s - c, \text{ also } P \text{ Mitte von } X'W'.$$

Demnach

$$VP = \frac{1}{2}(\varrho_b + \varrho_c), \qquad UP = \frac{1}{2}(\varrho_a - \varrho)$$

und

$$UV = 2r = \frac{1}{2}(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho).$$

Ausserdem ist W Höhenschnittpunkt des Dreiecks XYZ, V ist Mitte der Seite YZ, U ist Mitte des Höhenabschnitts XW, womit gleichzeitig die elementarsten Eigenschaften des Feuerbachschen Kreises nachgewiesen sind.

4. Von einem Drehkegel mit dem halben Öffnungswinkel α wird ein elliptischer Kegel so abgeschnitten, dass die Grundfläche die Grösse F hat und mit der Drehkegelachse den Winkel φ bildet. Wie gross wird die Oberfläche des elliptischen Kegels?

▸ Der Projektionssatz liefert sofort

$$O = F\,\frac{\sin\alpha + \sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

5. Gegeben sind drei von einem Punkt ausgehende Strahlen und in jedem der drei entstehenden Winkelräume ein Punkt. Man konstruiere das Dreieck, dessen Ecken auf den drei Strahlen liegen und dessen Seiten durch die gegebenen Punkte gehen.

▸ Sehr einfache Lösung durch räumliche Deutung: Spurendreieck einer Ebene.

Literaturüberschau

KARL WELLNITZ: *Kombinatorik*

50 Seiten mit einer Figur. Beihefte für den mathematischen Unterricht, Heft 6
Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1954

In übersichtlicher und auch für den Gymnasiasten leicht lesbarer Weise werden die Grundbegriffe und wichtigsten Formeln der Kombinatorik entwickelt (Permutationen, Kombinationen, Variationen, je ohne und mit Wiederholung, dazu Vorschriften für die lexikographische Anordnung). Den im Druck gut hervorgehobenen *Definitionen* und *Lehrsätzen* sind *Vorübungen* vorangestellt und zahlreiche *Beispiele* mit vollständiger Lösung beigefügt. Weitere 90 *Übungsaufgaben*, auf fünf Paragraphen verteilt und ohne Lösungsangabe, beziehen sich auf Buchstaben- und Ziffernanordnungen oder dann auf die «traditionellen» Fragen über Zahlenlotto, Kartenspiel, Domino, Urne mit Kugeln, Verbindungsgeraden, Primfaktorzerlegung usw. Das Beweisverfahren der «vollständigen Induktion» wird nicht nur verwendet, sondern an passender Stelle kurz charakterisiert. Das Heft ist stofflich abgeschlossen, dient aber auch der Vorbereitung auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Es kann Schülern zum Selbststudium und Lehrern als Hilfsmittel für Arbeitsgemeinschaften empfohlen werden. F. STEIGER

KARL WELLNITZ: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*

112 Seiten mit 19 Figuren. Beihefte für den mathematischen Unterricht, Heft 7
Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1954

Das Büchlein über *Wahrscheinlichkeitsrechnung* stützt sich ausdrücklich auf das oben besprochene über *Kombinatorik*, setzt aber ausserdem, wenigstens bei der Behandlung der Gaußschen Verteilungsfunktion und bei den geometrischen Wahrscheinlichkeiten,