**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 13 (1958)
**Heft:** 2

**Rubrik:** Ungelöste Probleme

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 06.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

*ist gleich Null,* dabei müssen die Radien auf die oben angegebene Weise als relative Zahlen aufgefasst werden.

Betrachtet man die verlängerten Seiten des Dreiecks $ABC$ als drei Kreise von unendlich grossem Radius und beachtet, dass vier Berührungskreise dieser Kreise auch unendlich gross sind, so geht dieser allgemeine Satz über in die bekannte Beziehung:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} - \frac{1}{\varrho} = 0.$$

ALFRED AEPPLI, Zürich

# Ungelöste Probleme

**Nr. 22.** L. FEJES TÓTH[1]) gab für eine heute noch nicht vollständig bewiesene Aussage die nachfolgend wiedergegebene Einkleidung:

a) Ist $A$ eine Punktmenge in der Ebene $E$ und befindet sich in $E$ eine Kreisscheibe $K$ in zufallsartig bestimmter Lage und ist $W$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $K$ genau einen Punkt der Menge $A$ bedeckt, so gilt

$$W \leqq \sqrt{48} - 6 = 0{,}928\ldots.$$

Eine anschaulich-geometrische Formulierung der gleichen Behauptung ist die folgende:

b) Durch lauter kongruente Kreisbereiche lassen sich höchstens 92,8% der Ebene einfach bedecken.

Endlich wollen wir die Aussage noch genauer formulieren:

c) In der Ebene $E$ sei eine Menge $M$ kongruenter Kreisbereiche $K$ von positivem Radius $R > 0$ vorgegeben. Es bezeichne $T$ die Menge derjenigen Punkte in $E$, die genau einem Kreis $K$ der Kreismenge $M$ angehören. Ist $S_r$ ein Kreisbereich vom Radius $r$ um einen festen Ursprung $Z$ der Ebene $E$ als Zentrum, so gilt

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{F(S_r \cap T)}{\pi r^2} \leqq \sqrt{48} - 6,$$

wo $F$ den Flächeninhalt und $S_r \cap T$ den Durchschnitt des Kreisbereichs $S_r$ mit der Punktmenge $T$ bezeichnet. In der obenstehenden Ungleichung gilt dann das Gleichheitszeichen, wenn $M$ aus abzählbar-unendlich vielen Kreisen vom Radius $R$ besteht, deren Mittelpunkte ein rhombisches Punktgitter bilden, wobei der Fundamentalrhombus den spitzen Winkel $\varphi = \pi/3$ und die Seitenlänge $s = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,R = 1{,}931\ldots R$ aufweist.

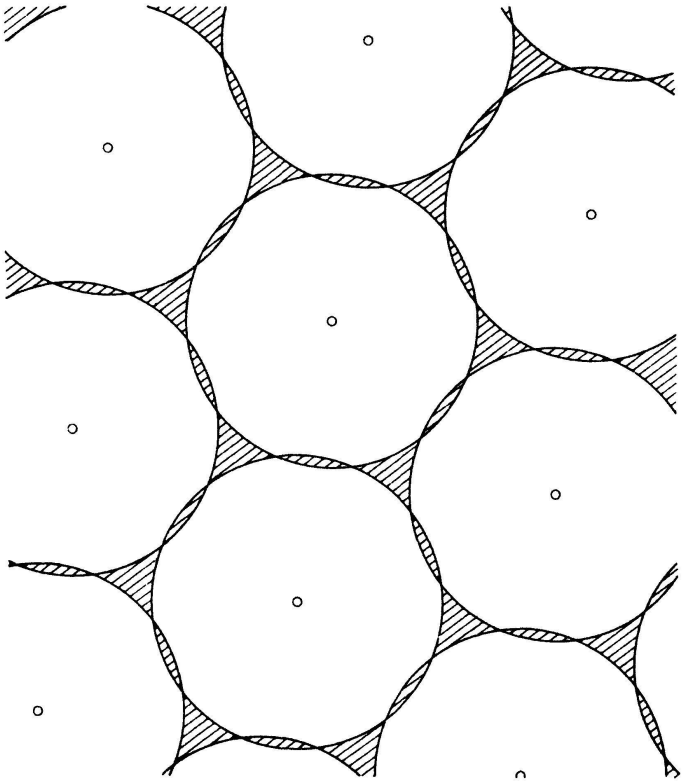
Unsere Abbildung zeigt die erwähnte extremale Kreismenge $M$, wobei der unschraffierte Teil der Ebene $E$ die Menge $T$ darstellt, während die Schraffur die Menge der durch die Kreisbereiche von $M$ keinfach oder zweifach überdeckten Punkte andeutet.

---

[1]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1953), insbesondere S. 97/98.

Die Behauptung wurde von L. FEJES TÓTH unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, dass kein Punkt der Ebene mehr als zwei Kreisen $K$ der Kreismenge $M$ angehört. Soeben hat J. BALÁZS[2]) die Richtigkeit auch dann nachgewiesen, wenn vorausgesetzt wird, dass die Kreise $K$ von $M$ gitterförmig angeordnet sind.

In voller Allgemeinheit ist das Problem noch ungelöst. H. HADWIGER



## Nachtrag zu Nr. 7

L. DANZER (Oberwolfach)[3]) bejaht die gestellte Frage und zeigt, dass die Stichzahl $k = 5$ ausreicht. Es gilt also der folgende

**Satz:** *Werden je fünf Kreisbereiche einer endlichen, wenigstens fünf Elemente enthaltenden Menge sich gegenseitig nicht überdeckender und kongruenter Kreise der Ebene durch eine geeignete Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreise der Menge trifft.*

Von Interesse ist der von L. DANZER direkt bewiesene gleichwertige Satz: Haben die Punkte einer ebenen, endlichen, wenigstens fünf Punkte enthaltenden Punktmenge $A$ paarweise Distanzen, die den Wert $d = 1$ nicht unterschreiten, und gilt für die Dicke $D$ der konvexen Hülle von $A$ die Ungleichung $D > 1$, so enthält $A$ eine fünfpunktige Teilmenge $A'$ derart, dass für die Dicke $D'$ der konvexen Hülle von $A'$ ebenfalls $D' > 1$ gilt. H. HADWIGER

---

[2]) J. BALÁZS, *Über ein extremales Kreisgitter*, Publ. Math. Debrecen (im Druck).

[3]) Der Beweis wurde am 11. Oktober 1957 an der Geometrietagung des Mathematischen Forschungsinstituts in Oberwolfach vorgetragen. Mittlerweile wurde er veröffentlicht: L. DANZER, *Über ein Problem der kombinatorischen Geometrie*, Arch. Math. *8*, 347–351 (1957).