Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1958)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

folge mit $D', D'', D''', \ldots$. Es sei M die auf K liegende Menge aller Eckpunkte der Dreiecke $D, D', D'', \ldots$. Nach der elementargeometrischen Sachlage (vgl. Figur 2) haben zwei aufeinanderfolgende Dreiecke der Dreiecksfolge einen Schenkel gemeinsam, und hieraus folgt leicht, dass M auch auf E liegen muss. Da aber a/π irrational ist, liegt die Punktmenge M auf K überall dicht[2]), so dass E mit K identisch sein muss, im Widerspruch zu unserer Gegenannahme. Damit ist unsere sich auf D beziehende Behauptung bewiesen.

3. Sollte das reguläre Dreieck tatsächlich das einzige Dreieck mit der hier erörterten Eigenschaft sein, so wäre der folgende Satz richtig: *Lässt sich in einer Eilinie ein einbeschriebenes nichtreguläres Dreieck, sich selbst stets kongruent bleibend, stetig herumführen, so ist die Eilinie eine Kreislinie.*

Herrn W. Süss verdanken wir die Mitteilung[3]), dass diese Frage schon vor Dezennien aufgeworfen und beispielsweise in Gesprächen mit T. Kubota erörtert worden ist, ohne dass diese unseres Wissens bis heute beantwortet werden konnte. Unser Problem besteht also darin, den oben formulierten Satz entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

H. Hadwiger

Aufgaben

Aufgabe 281. a) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z de l'équation $x^2+y^3=z^4$ sont contenues dans les formules

$$x=a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1},$$

où a et b sont des nombres rationnels non nuls, tels que $a^2 \neq b^2$.

b) Démontrer que toutes les solutions en nombres rationnels non nuls x, y, z, t de l'équation $x^2+y^3+z^4=t^2$ sont contenues dans les formules

$$x=a\,(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(c^2-a^2-b^2)^3\,b^{-2},$$
$$z=\;(c^2-a^2-b^2)^2\,b^{-1}, \qquad t=(c^2-a^2-b^2)^4\,b^{-3}\,c,$$

où a, b, c sont des nombres rationnels non nuls, tels que $c^2 \neq a^2+b^2$.

A. Schinzel, Varsovie

Lösung: Es wird unmittelbar verifiziert, dass

$$x=a\,(b^2-a^2)^4\,b^{-3}, \qquad y=(b^2-a^2)^3\,b^{-2}, \qquad z=(b^2-a^2)^2\,b^{-1} \tag{1}$$

für alle a und b die Gleichung

$$x^2+y^3=z^4 \tag{2}$$

erfüllen. Wenn umgekehrt die von Null verschiedenen rationalen Zahlen x, y, z (2) erfüllen, so setze man $a=x\,y^{-2}\,z \neq 0$, $b=y^{-2}\,z^3 \neq 0$. Man erhält

$$b^2-a^2=y^{-4}\,z^2\,(z^4-x^2)=y^{-1}\,z^2 \neq 0$$

und daraus durch Kombination mit den Ausdrücken für a und b sofort (1).

Die zweite Aufgabe wird ganz analog gelöst, nur setzt man hier $a=x\,y^{-2}\,z$, $b=y^{-2}\,z^3$, $c=y^{-2}\,z\,t$, wobei $c^2-a^2-b^2=y^{-1}\,z^2$.

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

---

[2]) Nach einem bekannten Theorem von H. Weyl ist M auf K sogar gleichverteilt. Vgl. G. Pólya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, 1. Band (Berlin 1925), S. 71, Nr. 166.

[3]) Brief vom 20. September 1957 an den Unterzeichneten.

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Durham, N.C., USA), R. LAUFFER (Graz), H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 282. Man berechne die Determinante $D_n = |a_{ik}|$, wo

$$a_{ii} = 2\cos\varphi \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad a_{i,i+1} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$a_{i,i-1} = 1 \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \qquad a_{ik} = 0 \quad (k \neq i,\ k \neq i \pm 1).$$

M. G. BEUMER, Enschede (Holland)

1. Lösung: Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhält man die Rekursionsformel

$$D_n = 2\,D_{n-1}\cos\varphi - D_{n-2}.$$

Man kann leicht feststellen, dass

$$D_1 \sin\varphi = \sin 2\varphi \quad \text{und} \quad D_2 \sin\varphi = \sin 3\varphi$$

ist. Man vermutet daher, dass auch allgemein

$$D_n \sin\varphi = \sin(n+1)\,\varphi$$

gilt. Wir nehmen an, dass die Richtigkeit dieser Vermutung bereits für alle D_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) festgestellt sei, und zeigen mittels der obigen Rekursionsformel, dass die vermutete Formel dann auch für $k = n$ gilt:

$$\begin{aligned} D_n \sin\varphi &= 2\,D_{n-1}\sin\varphi\cos\varphi - D_{n-2}\sin\varphi \\ &= 2\sin n\,\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\,\varphi \\ &= \sin(n+1)\,\varphi. \end{aligned}$$

Somit ist tatsächlich

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\,\varphi}{\sin\varphi}.$$

K. GRÜN, Steyr

2. Lösung: Expanding the determinant D_n with respect to the elements of the first row we get

$$D_n = x\,D_{n-1} - D_{n-2} \quad (x = 2\cos\varphi).$$

The recurrence has the general solution

$$A\,e^{ni\varphi} + B\,e^{-ni\varphi}$$

where A and B are independent of n. Using $D_0 = 1$, $D_1 = x$, the solution reduces to the Tchebychef polynomial

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\,\varphi}{\sin\varphi}.$$

L. CARLITZ, Durham, N.C. (USA)

Weitere Lösungen sandten J. BASILE (Bruxelles), J. C. BINZ (Bern), K. GRÜN (Steyr) (2. Lösung), R. LAUFFER (Graz), F. LEUENBERGER (Zuoz), H. MEILI (Winterthur), W. STRICKLER (Zürich), R. WHITEHEAD (Camborne, Cornwall, England).

Neue Aufgaben

315. Mittelwertsatz der Integralrechnung und die drei elementaren Mittelwerte. Es sei $f(x)$ definiert (und integrierbar) im Intervall (a, b). Man nehme an, dass in jedem Teilintervall (u, v) von (a, b)

$$\int_u^v f(x)\,dx = M\,(v-u),$$

wo

$$M = \frac{f(u) + f(v)}{2}. \tag{1}$$

Man beweise, dass dies dann und nur dann gültig ist, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist: $f(x) = k\,x + r$ mit konstanten k und r.

Man nehme an, dass $f(x)$ in (a, b) nur positive Werte annimmt, und beweise, dass die Beziehung

$$M = [f(u)\, f(v)]^{1/2} \tag{2}$$

dann und nur dann im obigen Umfang gültig ist, wenn

$$f(x) = (k\,x + r)^{-2},$$

und dass

$$M = \frac{2\, f(u)\, f(v)}{f(u) + f(v)} \tag{3}$$

dann und nur dann analogerweise gültig ist, wenn

$$f(x) = (k\,x + r)^{-1/2}.$$

G. Pólya, Palo Alto (California, USA)

316. Man konstruiere in der Ebene drei sich gegenseitig berührende Kreise, von denen je eine Tangente mit Berührungspunkt gegeben ist. C. Bindschedler, Küsnacht

317. On considère toutes les coniques bitangentes à deux cercles donnés $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, et ayant la ligne des centres de ces cercles comme axe de symétrie. Dans chacune de ces coniques on mène les cordes qui joignent un point de contact de $\mathfrak{C}_1$ à un point de contact de $\mathfrak{C}_2$. Trouver l'enveloppe de ces droites. A. Loeffler, Pully-Rosiaz

318. Kann man aus allen konvexen Rotationskörpern des R_3 durch Nebenbedingungen solche Klassen auswählen, dass die Kugel im Vergleich mit allen Körpern einer Klasse weder maximales noch minimales Volumen hat? H. Bieri, Bern

319. Man zeige, dass in den Dreiecken, für die das Seitenverhältnis $\lambda = c/a$ einen konstanten Wert $(1 < \lambda < 2)$ hat, die aus den entsprechenden Gegenwinkeln gebildete Summe $\sigma = \gamma + 2\,\alpha$ dann und nur dann maximal ist, wenn $\operatorname{tg}\gamma + 2\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Setzt man $\tau = (\alpha - \beta)/2 = (\sigma - \pi)/2$, so gilt für das Maximum der Winkeldifferenz $\alpha - \beta$

$$\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\tau_{max}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\gamma_{max} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{4 - \lambda^2}}.$$

R. Rose, Saarbrücken

320. 1. n und d sind natürliche Zahlen, r eine ganze Zahl. Weiter ist

$$S(n, d, r) = \sum \binom{n}{k}, \qquad k \equiv r \pmod{d},$$

wo die Summe nur über das Intervall $0 \leqq k \leqq n$ zu erstrecken ist. Dann gilt die Formel

$$S(n, d, r) = \frac{2^n}{d} \sum_{t=0}^{d-1} \cos\left\{(n - 2\,r)\,\frac{t\,\pi}{d}\right\} \left(\cos\frac{t\,\pi}{d}\right)^n.$$

2. Die Zahlenfolge v_n ist durch

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 3, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2} \quad (n \geqq 3)$$

bestimmt. Dann gilt, wenn x aus $2x \equiv n \pmod 5$ bestimmt ist,

$$S(n, 5, r) = \begin{cases} \frac{1}{5}[2^n + (-1)^n 2 v_n] & r \equiv x \pmod 5, \\ \frac{1}{5}[2^n + (-1)^n v_{n-1}] & r \equiv x \pm 1 \pmod 5, \\ \frac{1}{5}[2^n - (-1)^n v_{n+1}] & r \equiv x \pm 2 \pmod 5. \end{cases}$$

A. Bager, Hjørring (Dänemark)

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Von einer rechteckigen marmorenen Platte $ABCD$ ist ein dreieckiges Stück UCV abgebrochen. Wie kann aus dem Rest eine möglichst grosse neue rechteckige Platte hergestellt werden? (Die Ecke A soll erhalten bleiben.)
   ▶ Verlängere UV bis zu den Schnittpunkten P mit AD und Q mit AB. Die neue Ecke liegt im Mittelpunkt der Strecke PQ oder in demjenigen Endpunkt von UV, der diesem Mittelpunkt näher liegt.
2. Durch die Punkte A und B, die auf verschiedenen Seiten der Gerade g liegen, ist der Kreis zu legen, der auf g die Sehne kleinster Länge abschneidet.
   ▶ Die beiden Sehnenabschnitte müssen gleich lang werden.
3. An die Ellipse mit den Halbachsen a und b ist diejenige Tangente zu legen, deren Abschnitt zwischen den beiden Hauptachsen ein Minimum ist.
   ▶ Die Abschnitte auf den Hauptachsen werden $\sqrt{a(a+b)}$ und $\sqrt{b(a+b)}$, der minimale Abschnitt hat die Länge $a+b$, der Berührungspunkt teilt ihn im Verhältnis $a:b$.
4. Ein gegebener Drehkegel ist so zu schneiden, dass die Schnittfigur ein Parabelsegment möglichst grosser Fläche ist.
   ▶ Die Parabelsehne halbiert den zu ihr senkrechten Radius des Grundkreises.
5. Gegeben sind zwei windschiefe Geraden $a(K; L)$ und $b(M; N)$.

   $$K(0;\ 13;\ 10), \quad L(17;\ 2;\ 0), \quad M(0;\ -3;\ 6), \quad N(17;\ 12;\ 9).$$

   Zeichne das kleinste gleichseitige Dreieck, von dem eine Seite in a und der Schwerpunkt in b liegt.

Berichte

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

46. Jahresversammlung in Neuenburg, 22. September 1957

Mlle S. Piccard (Neuenburg): Quelques résultats de la théorie des groupes.
Mme R. C. H. Tanner (Wallington, England): Sur la nullité.
H. Bieri (Bern): Beitrag zu einem Extremalproblem über konvexe Rotationskörper.
K. Arbenz (Rapperswil SG): Zu den Integralgleichungen der konformen Abbildung.