

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilungen

Formules sur les valeurs absolues des nombres réels

Notations. $E \equiv \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ l'ensemble des nombres réels indiqués.

Si $a_1 > a_2 > \dots > a_s$, alors

$$\left. \begin{aligned} \max_p E &\equiv a_{p+1} \\ \min_p E &\equiv a_{s-p} \end{aligned} \right\} p = 0, 1, 2, \dots, s-1,$$

avec $\max_0 E \equiv \max E$ et $\min_0 E \equiv \min E$.

1. Nous avons démontré les formules suivantes:

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k (2i-1) (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E), \quad (1)$$

$$\sum_{1 \leq n < m \leq 2k+1} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^k 2i (\max_{k-i} E - \min_{k-i} E). \quad (2)$$

Comme point de départ dans l'établissement des formules (1) et (2) nous avons pris la formule connue

$$|a_n - a_m| \equiv \max(a_n, a_m) - \min(a_n, a_m).$$

Les formules (1) et (2) peuvent être démontrées par l'induction complète, mais nous omettons la démonstration.

2. Les identités indiquées (1) et (2) restent également valables si parmi les nombres a_1, a_2, \dots, a_s il y en a de tels qui sont égaux entre eux.

Dans ce cas

$$\max_p E = a_{p+1} = a_q,$$

lorsque

$$a_1 = a_2 = \dots = a_q > a_{q+1} \dots > a_s \quad (p < q).$$

3. Voici quelques formules particulières:

$$|a_1 - a_2| \equiv \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2);$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| \\ + |a_2 - a_3| \equiv 2 \{ \max(a_1, a_2, a_3) - \min(a_1, a_2, a_3) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| \\ + |a_3 - a_4| \equiv 3 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4) \} \\ + \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| \\ + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| \\ + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| \\ + |a_4 - a_5| \\ \equiv 4 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \} \\ + 2 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| \\
& \equiv 5 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + 3 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \} \\
& + \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \}; \\
& |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| + |a_1 - a_7| \\
& \quad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| + |a_2 - a_6| + |a_2 - a_7| \\
& \quad \quad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| + |a_3 - a_6| + |a_3 - a_7| \\
& \quad \quad \quad + |a_4 - a_5| + |a_4 - a_6| + |a_4 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad + |a_5 - a_6| + |a_5 - a_7| \\
& \quad \quad \quad \quad \quad + |a_6 - a_7| \\
& \equiv 6 \{ \max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 4 \{ \max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \} \\
& + 2 \{ \max_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) - \min_2(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \}.
\end{aligned}$$

$\max_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$ signifie le plus grand des nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$, où l'on a omis au préalable les p ($p < s$) des plus grands parmi les nombres en question.

$\min_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$ signifie le plus petit des nombres a_1, a_2, \dots, a_s , où l'on a omis, préalablement, les p ($p < s$) des plus petits parmi ces nombres.

4. Cette note se rattache à la note suivante:

D. S. MITRINOVITCH, *Sur quelques identités élémentaires*, Rev. Math. élément. 10, 65-66 (1955)¹.
D. S. MITRINOVITCH, Belgrade

Aufgaben

Aufgabe 272. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de n nombres naturels, où $n > 2$, soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung: Sind $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ die Exponenten der Primzahl p in der Zerlegung der natürlichen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n , dann ist α_1 der Exponent von p im grössten gemeinsamen Teiler T und α_n der Exponent von p im kleinsten gemeinsamen Vielfachen V . Das Produkt der a_i ist dann und nur dann gleich TV , wenn für jede Primzahl p

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_n$$

gilt. Da die α_i nichtnegativ sind, folgt daraus $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Wegen $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ist auch $\alpha_1 = 0$, das heisst, p kann nur in einem einzigen a_i aufgehen. Die a_i sind also paarweise teilerfremd.

Lösungen sandten A. ADAM (Debrecen), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest).

Aufgabe 273. Gegeben sind vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 und ein Punkt P . Gesucht werden zwei sich in P berührende Kugeln, von denen die eine K_1 und K_3 , die andere K_2 und K_4 berührt. C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

¹) Voir aussi: D. S. MITRINOVITCH, *Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 8, 15-22 (1956).