Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Kleine Mitteilungen

Formules sur les valeurs absolues des nombres réels

Notations. $E \equiv \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ l'ensemble des nombres réels indiqués.
Si $a_1 > a_2 > \cdots > a_s$, alors

$$\left.\begin{array}{l} \max_p E \equiv a_{p+1} \\ \min_p E \equiv a_{s-p} \end{array}\right\} \quad p = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

avec $\max_0 E \equiv \max E$ et $\min_0 E \equiv \min E$.

1. Nous avons démontré les formules suivantes:

$$\sum_{1 \leqq n < m \leqq 2k} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^{k} (2i-1)\,(\max_{k-i} E - \min_{k-i} E), \tag{1}$$

$$\sum_{1 \leqq n < m \leqq 2k+1} |a_n - a_m| \equiv \sum_{i=1}^{k} 2i\,(\max_{k-i} E - \min_{k-i} E). \tag{2}$$

Comme point de départ dans l'établissement des formules (1) et (2) nous avons pris la formule connue

$$|a_n - a_m| \equiv \max(a_n, a_m) - \min(a_n, a_m).$$

Les formules (1) et (2) peuvent être démontrées par l'induction complète, mais nous omettons la démonstration.

2. Les identités indiquées (1) et (2) restent également valables si parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_s$ il y en a de tels qui sont égaux entre eux.

Dans ce cas

$$\max_p E = a_{p+1} = a_q,$$

lorsque

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_q > a_{q+1} \cdots > a_s \qquad (p < q).$$

3. Voici quelques formules particulières:

$$|a_1 - a_2| \equiv \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2);$$

$$\begin{aligned} &|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| \\ &\qquad + |a_2 - a_3| \equiv 2\{\max(a_1, a_2, a_3) - \min(a_1, a_2, a_3)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| \\ &\qquad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| \\ &\qquad\qquad + |a_3 - a_4| \equiv 3\{\max(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4)\} \\ &\qquad\qquad\qquad + \{\max_1(a_1, a_2, a_3, a_4) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4)\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| \\ &\qquad + |a_2 - a_3| + |a_2 - a_4| + |a_2 - a_5| \\ &\qquad\qquad + |a_3 - a_4| + |a_3 - a_5| \\ &\qquad\qquad\qquad + |a_4 - a_5| \\ &\equiv 4\{\max(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\} \\ &+ 2\{\max_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) - \min_1(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|a_1-a_2| &+ |a_1-a_3| + |a_1-a_4| + |a_1-a_5| + |a_1-a_6| \\
&+ |a_2-a_3| + |a_2-a_4| + |a_2-a_5| + |a_2-a_6| \\
&+ |a_3-a_4| + |a_3-a_5| + |a_3-a_6| \\
&+ |a_4-a_5| + |a_4-a_6| \\
&+ |a_5-a_6| \\
\equiv\ & 5\{\max(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) - \min(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\} \\
+\ & 3\{\max_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) - \min_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\} \\
+\ & \{\max_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6) - \min_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|a_1-a_2| &+ |a_1-a_3| + |a_1-a_4| + |a_1-a_5| + |a_1-a_6| + |a_1-a_7| \\
&+ |a_2-a_3| + |a_2-a_4| + |a_2-a_5| + |a_2-a_6| + |a_2-a_7| \\
&+ |a_3-a_4| + |a_3-a_5| + |a_3-a_6| + |a_3-a_7| \\
&+ |a_4-a_5| + |a_4-a_6| + |a_4-a_7| \\
&+ |a_5-a_6| + |a_5-a_7| \\
&+ |a_6-a_7| \\
\equiv\ & 6\{\max(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) - \min(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\} \\
+\ & 4\{\max_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) - \min_1(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\} \\
+\ & 2\{\max_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7) - \min_2(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)\}.
\end{aligned}
$$

$\max_p(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ signifie le plus grand des nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$, où l'on a omis au préalable les p $(p < s)$ des plus grands parmi les nombres en question.

$\min_p(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ signifie le plus petit des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_s$, où l'on a omis, préalablement, les p $(p < s)$ des plus petits parmi ces nombres.

4. Cette note se rattache à la note suivante:
D. S. Mitrinovitch, *Sur quelques identités élémentaires*, Rev. Math. élément. *10*, 65–66 (1955)[1]. D. S. Mitrinovitch, Belgrade

Aufgaben

Aufgabe 272. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le produit de n nombres naturels, où $n > 2$, soit égal au produit du plus grand commun diviseur de ces nombres par leur plus petit commun multiple. W. Sierpiński, Varsovie

Lösung: Sind $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ die Exponenten der Primzahl p in der Zerlegung der natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dann ist α_1 der Exponent von p im grössten gemeinsamen Teiler T und α_n der Exponent von p im kleinsten gemeinsamen Vielfachen V. Das Produkt der a_i ist dann und nur dann gleich TV, wenn für jede Primzahl p

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_n$$

gilt. Da die α_i nichtnegativ sind, folgt daraus $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. Wegen $\alpha_1 \leqq \alpha_2$ ist auch $\alpha_1 = 0$, das heisst, p kann nur in einem einzigen a_i aufgehen. Die a_i sind also paarweise teilerfremd.

Lösungen sandten A. Adam (Debrecen), R. Lauffer (Graz), J. Schopp (Budapest).

Aufgabe 273. Gegeben sind vier Kugeln K_1, K_2, K_3, K_4 und ein Punkt P. Gesucht werden zwei sich in P berührende Kugeln, von denen die eine K_1 und K_2, die andere K_3 und K_4 berührt. C. Bindschedler, Küsnacht

[1]) Voir aussi: D. S. Mitrinovitch, *Sur certaines relations restant valables si l'on permute les opérateurs y intervenant*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie *8*, 15–22 (1956).