Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 5

Artikel: Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper

Autor: Hadwiger, H. / Bieri, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19213

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper

1. Innerhalb der Theorie der konvexen Körper des gewöhnlichen Raumes spielen drei fundamentale Masszahlen eine wichtige Rolle, nämlich das Volumen, die Oberfläche und das Integral der mittleren Krümmung. Diese dem konvexen Körper A zugeordneten Masse seien der Reihe nach mit

$$V = V(A), \quad F = F(A), \quad M = M(A) \tag{1}$$

bezeichnet. Wir beschränken uns in dieser Note auf die Klasse $\boldsymbol{K}_0$ der rotationssymmetrischen konvexen Körper[1]). Auch bei dieser Einschränkung ist das Problem, alle zwischen den drei genannten Masszahlen bestehenden Ungleichungen anzugeben, bis heute noch ungeklärt. Genauer: Ein System $\boldsymbol{S}$ von Ungleichungen

$$\Phi(V, F, M) \geqq 0 \quad [\Phi \in \boldsymbol{S}] \tag{2}$$

wollen wir vollständig nennen, wenn zu drei vorgegebenen nichtnegativen Zahlwerten V, F und M dann und nur dann ein konvexer Rotationskörper $A \in \boldsymbol{K}_0$ existiert, dessen Masse mit den drei Werten gemäss (1) übereinstimmen, wenn die Ungleichung (2) für jedes $\Phi \in \boldsymbol{S}$ erfüllt wird.

Die klassische Theorie liefert lediglich eine dem vollständigen System angehörende Ungleichung, nämlich

$$M(A) \leqq M(K) \quad [F(K) = F(A); \quad V(K) = V(A)], \tag{3}$$

wobei K einen Kappenkörper der Kugel bezeichnet (Tafel b, Figur K). Die Ungleichung sagt aus, dass unter allen $A \in \boldsymbol{K}_0$ mit vorgeschriebener Oberfläche und ebenso vorgeschriebenem Volumen der Kappenkörper der Kugel K das grösstmögliche Integral der mittleren Krümmung aufweist[2]).

Dieser bekannten Ungleichung wurde in neuerer Zeit eine weitere an die Seite gestellt, nämlich

$$M(A) \geqq M(S) \quad [F(S) = F(A); \quad V(S) = V(A)], \tag{4}$$

---

[1]) Diese Beschränkung hat sich im Zusammenhang mit den sich auf die drei Masszahlen beziehenden Extremalproblemen als wesentlich herausgestellt. Dies entspricht der erstmals in einer kurzen Note [1] (siehe Literaturverzeichnis) sichergestellten Tatsache, dass es konvexe Körper gibt, deren Masszahlen V, F und M sich nicht durch rotationssymmetrische Körper realisieren lassen. Hieraus folgt, dass es Ungleichungen geben muss, die lediglich für konvexe Rotationskörper, nicht aber für beliebig gestaltete konvexe Körper gelten.

[2]) Die Ungleichung, die übrigens für beliebige konvexe Körper gilt, lässt sich in der bekannten einfachen Form $F^2 - 3\,M\,V \geqq 0$ schreiben, wobei, wie H. Minkowski vermutete und G. Bol nachwies, Gleichheit nur für Kappenkörper der Kugel bestehen kann. Die andern Ungleichungen der klassischen Theorie, nämlich $M^2 - 4\,\pi F \geqq 0$, $M^3 - 48\,\pi^2 V \geqq 0$ und $F^3 - 36\,\pi\,V^2 \geqq 0$, für welche Gleichheit nur für die Kugel und bei der letzten isoperimetrischen Ungleichung ausserdem noch für die Strecke besteht, lassen sich alle aus der obenstehenden Minkowskischen Ungleichung folgern und sagen wesentlich weniger aus. Im Zusammenhang mit dem von uns hier bearbeiteten Problem lässt sich zusammenfassend sagen, dass die Brun-Minkowskische Theorie genau eine zum vollständigen System gehörende Ungleichung liefert.

wo S die symmetrische Kugelschicht bedeutet (Tafel b, Figur S). Diese besagt, dass unter allen $A \in \boldsymbol{K}_0$ mit vorgeschriebener Oberfläche und ebenso vorgeschriebenem Volumen die Kugelschicht S das kleinstmögliche Integral der mittleren Krümmung aufweist[3]).

In den Ungleichungen (3) und (4) ist vorausgesetzt, dass die in Betracht fallenden Extremalkörper K und S mit den beiden vorgegebenen Masszahlen existieren; andernfalls existiert auch kein Körper A mit den nämlichen Massen.

Die beiden Ungleichungen (3) und (4) bilden nun aber keineswegs ein vollständiges System. Wenn nämlich das vorgegebene Volumen V gegenüber der Oberfläche F relativ klein ist, existieren nicht zu allen Zwischenwerten M des durch die absoluten Extremwerte gemäss (3) und (4) gebildeten Intervalls $M(S) \leqq M \leqq M(K)$ Körper $A \in \boldsymbol{K}_0$, so dass $M = M(A)$ ausfällt. Es müssen demnach weitere Ungleichungen zwischen den drei Massen V, F und M vorhanden sein; Gleichheit wird in diesen unbekannten Ungleichungen für gewisse Scharen ebenfalls unbekannter Extremalkörper $X \in \boldsymbol{K}_0$ bestehen. In Frage kommen Zylinder, Kegelstümpfe, Kegel, Doppelkegel und Kappenkörper von Kugellinsen, die sich gegenseitig ablösen.

Die Aufgabe, das vollständige System aller Ungleichungen und die zugehörigen Scharen extremaler konvexer Rotationskörper aufzufinden, wollen wir das sich auf die Klasse $\boldsymbol{K}_0$ beziehende Hauptproblem nennen.

2. Die Problemlage lässt sich auf mannigfaltige Art variieren, indem eine von den drei Masszahlen V, F und M durch eine andere, der Ausmessung eines rotationssymmetrischen Eikörpers dienende Grösse ersetzt wird. Wählt man beispielsweise die Länge l des Rotationskörpers, das heisst die Breite des Körpers in Richtung der Rotationsachse als weiteres Mass, so ergeben sich die drei Nebenprobleme (V, F, l), (F, M, l) und (M, V, l), welche darauf hinauslaufen, sämtliche zwischen den in Klammer gesetzten drei Massen bestehenden Relationen aufzusuchen[4]). Es hat sich in unserem Zusammenhang gezeigt, dass sich als Hilfsmass besonders der Äquatorradius a, das heisst der Radius eines grössten Breitenkreises oder also der Radius eines achsenparallelen Hüllzylinders des Rotationskörpers sehr gut eignet[5]). In der Tat sind die drei resultierenden Nebenprobleme (V, F, a), (F, M, a) und (M, V, a) heute vollständig gelöst[6]). Insgesamt gibt es also drei vollständige Nebensysteme, wovon jedes System vier Ungleichungen umfasst. Die insgesamt zwölf Ungleichungen sind in der Tafel a (Seite 103) zusammengestellt. Die auftretenden Extremalkörper sind alle elementar. Es handelt sich um vier Typen, die in jedem der drei vollständigen Nebensysteme in gleicher Reihenfolge auftreten, nämlich Kugelzylinder T, symmetrische Kugellinse L, einseitiger Kegel C und Zylinder Z (Tafel b, Figuren T, L, C, Z).

---

[3]) Diese Ungleichung, deren Herleitung in [4] gegeben wurde, ist nur für rotationssymmetrische konvexe Körper gültig. Sie stellt ihrem Sinne nach ein Gegenstück zur Minkowskischen Ungleichung dar, lässt sich aber im Gegensatz zu dieser nicht auf elementare explizite Weise formelmässig anschreiben.

[4]) Hier sind bereits zahlreiche einzelne Ergebnisse bekannt. Vgl. [2] und eine Reihe weiterer Arbeiten des gleichen Verfassers, die im Schriftenverzeichnis des Buches [7] zitiert sind.

[5]) Der Äquatorradius tritt bereits in zahlreichen älteren Ungleichungen für konvexe Rotationskörper auf; insbesondere sind hier die von T. BONNESEN, A. DINGHAS und E. SCHMIDT stammenden Verschärfungen der klassischen Ungleichungen zu erwähnen, wie sie beispielsweise in [5] erörtert sind. Neue Ungleichungen dieser Art finden sich auch in [6].

[6]) Eine Übersicht über alle diesbezüglichen Resultate für konvexe Rotationskörper des k-dimensionalen euklidischen Raumes gibt der Vortrag auf der Tagung der DMV im Jahre 1955 in Göttingen [8].

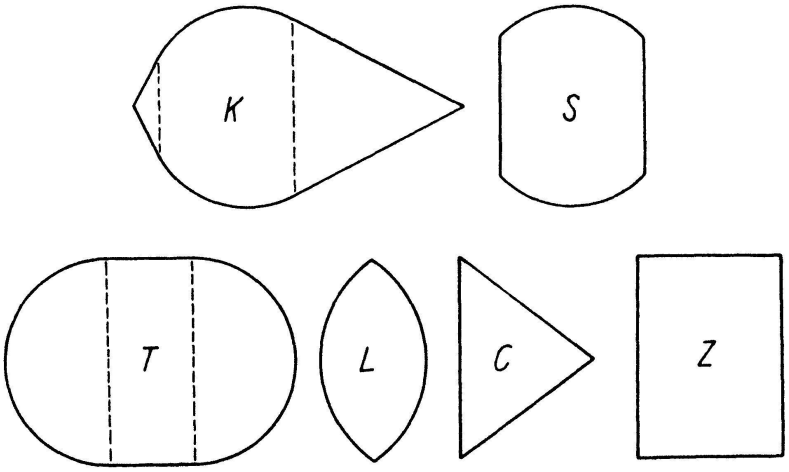
Tafel a

Problem	Ungleichung			Gültigkeitsbereich
a) (V, F, a)	(1a)	$V(A) \leqq V(T)$	$[F(A) = F(T)]$	$4\pi a^2 \leqq F < \infty$
	(2a)	$V(A) \leqq V(L)$	$[F(A) = F(L)]$	$2\pi a^2 \leqq F \leqq 4\pi a^2$
	(3a)	$V(A) \geqq V(C)$	$[F(A) = F(C)]$	$(18\pi/5)\, a^2 \leqq F < \infty$
	(4a)	$V(A) \geqq V(Z)$	$[F(A) = F(Z)]$	$2\pi a^2 \leqq F \leqq (18\pi/5)\, a^2$
b) (F, M, a)	(1b)	$M(A) \geqq M(T)$	$[F(A) = F(T)]$	$4\pi a^2 \leqq F < \infty$
	(2b)	$M(A) \geqq M(L)$	$[F(A) = F(L)]$	$2\pi a^2 \leqq F \leqq 4\pi a^2$
	(3b)	$M(A) \leqq M(C)$	$[F(A) = F(C)]$	$\sigma\pi a^2 \leqq F < \infty$ [1]
	(4b)	$M(A) \leqq M(Z)$	$[F(A) = F(Z)]$	$2\pi a^2 \leqq F \leqq \sigma\pi a^2$
c) (M, V, a)	(1c)	$M(A) \geqq M(T)$	$[V(A) = V(T)]$	$(4\pi/3)\, a^3 \leqq V < \infty$
	(2c)	$M(A) \geqq M(L)$	$[V(A) = V(L)]$	$0 \leqq V \leqq (4\pi/3)\, a^3$
	(3c)	$M(A) \leqq M(C)$	$[V(A) = V(C)]$	$(\varrho\pi/3)\, a^3 \leqq V < \infty$ [2]
	(4c)	$M(A) \leqq M(Z)$	$[V(A) = V(Z)]$	$0 \leqq V \leqq (\varrho\pi/3)\, a^3$

[1]) σ ist die einzige im Intervall $2 < \sigma < \infty$ liegende reelle Lösung der transzendenten Gleichung $\arccos[1/(\sigma-1)] = \sqrt{\sigma(\sigma-2)} - \sigma/2 + 1$. Es ist $\sigma = 2{,}376216\ldots$.

[2]) ϱ ist die einzige im Intervall $0 < \varrho < \infty$ liegende reelle Lösung der transzendenten Gleichung $\operatorname{arctg}\varrho = (2/3)\,\varrho$. Es ist $\varrho = 1{,}451103\ldots$.

Tafel b



Die Ungleichungen lassen sich besonders übersichtlich zusammenstellen, wenn wir voraussetzen, dass alle sich beteiligenden Körper den gleichen Äquatorradius a aufweisen sollen, so dass diese simultane Normierung auf die Form

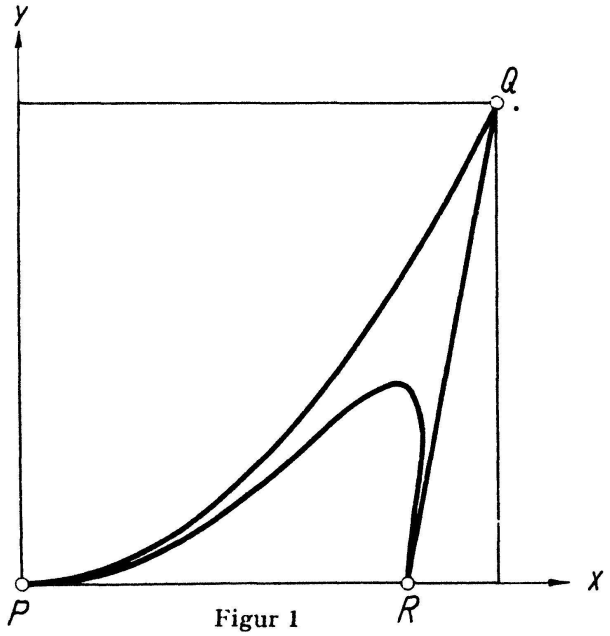
$$a(A) = a(T) = a(L) = a(C) = a(Z) = a \tag{5}$$

gebracht werden kann.

3. Man kann sich nun grundsätzlich die Frage vorlegen, ob sich aus den drei zur Verfügung stehenden Lösungen der Nebenprobleme Schlüsse in bezug auf das Hauptproblem ziehen lassen. Zunächst ist klar, dass zu vier Zahlwerten V, F, M und a jedenfalls nur dann ein Körper der Klasse $\boldsymbol{K}_0$ existiert, der diese vier Masszahlen

aufweist, wenn alle zwölf Ungleichungen der Tafel a simultan erfüllt werden. Das gesamte Relationensystem ist also für die Realisierung notwendig; dagegen ist dieses nicht hinreichend. Sind nämlich alle zwölf Ungleichungen erfüllt, so kann nur geschlossen werden, dass drei Körper in $\boldsymbol{K}_0$ existieren, welche der Reihe nach die Werte (V, F, a), (F, M, a) und (M, V, a) realisieren, woraus aber nicht gefolgert werden darf, dass ein einziger Körper alle vier Werte liefert.

Eliminiert man also aus den zwölf Ungleichungen die Hilfsgrösse a, so entsteht ein Ungleichungssystem für die drei Masse V, F und M, wobei im allgemeinen in $\boldsymbol{K}_0$ keine Körper existieren, für welche das Gleichheitszeichen beansprucht wird. Der



Figur 1

	P	Q	R
x	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$\frac{8}{\pi^2} = 0{,}810$
y	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$0 = 0{,}000$

Wertevorrat (V, F, M) wird auf diese Weise lediglich eingeschränkt, aber nicht exakt begrenzt. Die Lösung des Hauptproblems erfordert aber die Kenntnis der exakten Begrenzung.

Immerhin ist die durch die oben erwähnte Elimination von a erzielbare Einschränkung doch recht aufschlussreich, und es ist das eigentliche Ziel der vorliegenden Studie, diese in geeigneter Weise sichtbar werden zu lassen.

4. Eine klare Übersicht über die bestehenden Verhältnisse gewinnt man dadurch, dass man die Klasse $\boldsymbol{K}_0$ der konvexen Rotationskörper durch die Einführung der Koordinaten[7])

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}; \qquad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3} \tag{6}$$

[7]) Es handelt sich um die von W. BLASCHKE [3] eingeführten Koordinaten eines Eikörpers, die gegenüber Ähnlichkeitsabbildungen invariant sind.

auf einen Bereich $\tilde{K}_0$ einer (x, y)-Ebene abbildet. Den beiden Ungleichungen (3) und (4) entsprechen dann die Relationen

$$y \leqq x^2 \tag{7}$$

und

$$y \geqq \frac{4 \cos\varphi\,(2 + \sin^2\varphi)}{(2\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)^3} \qquad \left[x = \frac{2\,(2\cos\varphi + \sin^2\varphi)}{(2\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)^2}\,; \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right]. \tag{8}$$

Sind $P = (0, 0)$, $Q = (1,1)$ und $R = (8/\pi^2, 0)$ die drei wichtigen Bildpunkte von Strecke, Kugel und Kreisscheibe, so ist die Bildmenge $\tilde{K}_0$ ein von den drei Kurven-

Tafel c

Problem	Ungleichung	Gültigkeitsbereich
a) $(y, x; p)$	(1a) $y \leqq (p/2)\,(3\,x - p^2)$	$p^2 \leqq x \leqq 1$
	(2a) $y \leqq (1/2)\,(x + p^2)\,(2\,x - p^2)^{1/2}$	$(1/2)\,p^2 \leqq x \leqq p^2$
	(3a) $y \geqq (p/2)\,[2\,x\,(2\,x - p^2)]^{1/2}$	$(9/10)\,p^2 \leqq x \leqq 1$
	(4a) $y \geqq (3\,p/4)\,(2\,x - p^2)$	$(1/2)\,p^2 \leqq x \leqq (9/10)\,p^2$
b) (x, p)	(1b) $x \leqq 2\,p - p^2$	$p^2 \leqq x \leqq 1$
	(2b) $(2\,x - p^2)^{1/2} + (p/2)$ $\times \arccos\{(p/x)\,(2\,x - p^2)^{1/2}\} \leqq 1$	$(1/2)\,p^2 \leqq x \leqq p^2$
	(3b) $(p/4)\,\{\pi - \arccos[p^2/(4\,x - p^2)]\}$ $+ (1/2\,p)\,[2\,x\,(2\,x - p^2)]^{1/2} \geqq 1$	$(\sigma/4)\,p^2 \leqq x \leqq 1$
	(4b) $x \geqq 2\,p - (\pi - 1)\,p^2/2$	$(1/2)\,p^2 \leqq x \leqq (\sigma/4)\,p^2$
c) (y, p)	(1c) $y \leqq p^2\,(3 - 2\,p)$	$p^3 \leqq y \leqq 1$
	(2c) $1 \geqq (p/2)\,\{q + 2\,\mathrm{tg}\,(\pi - 2\,q)/4\}$ [1]	$0 \leqq y \leqq p^3$
	(3c) $1 \leqq (p/4)\,\{\pi - \mathrm{arctg}\,(4\,y/p^3)\}$ $+ y/p^2$	$(\varrho/4)\,p^3 \leqq y \leqq 1$
	(4c) $y \geqq 3\,p^2 - (3\,\pi/4)\,p^3$	$0 \leqq y \leqq (\varrho/4)\,p^3$

[1]) q bezeichnet hier die einzige im Intervall $0 < q < \pi/2$ liegende Lösung der Gleichung

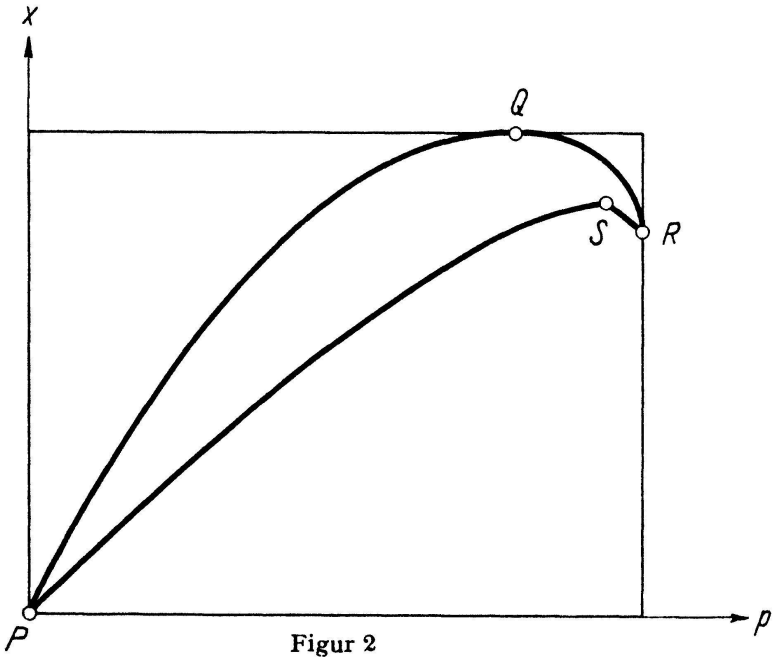
$$p^6\,(2 + \sin q)^2\,(1 - \sin q) = 4\,(1 + \sin q)^3\,y^2.$$

bögen PQ, QR und RP berandeter, ganz im Quadrat $0 \leqq x, y \leqq 1$ liegender abgeschlossener und einfach-zusammenhängender Bereich (vgl. Figur 1). Die beiden Randstücke PQ und QR entsprechen den einparametrigen Scharen der Kugelkappenkörper K und der symmetrischen Kugelschichten S; das dritte Randstück RP entspricht den noch unbekannten Extremalkörperscharen, wie sie am Ende von Abschnitt 1 bereits erörtert wurden.

5. Will man die drei in Abschnitt 2 näher erklärten Nebenprobleme (V, F, a), (F, M, a) und (M, V, a) auf ähnliche Weise bearbeiten wie oben das Hauptproblem, so drängt sich die Einführung der weiteren Koordinate

$$p = \frac{4\,\pi\,a}{M} \tag{9}$$

auf, durch die eine Verbindung des Äquatorradius a mit den Masszahlen V, F und M ermöglicht wird. Die Grösse p stellt ein Rundungsmass für die Rotationseikörper dar. Das Intervall $1 \leqq p \leqq 4/\pi$ kennzeichnet die «flachen» und das Intervall $0 \leqq p \leqq 1$ die «langen» Körper; dem Wert $p = 1$, bei welchem die flache in die lange Form übergeht, entspricht die «runde» Form, wie sie durch die Kugel repräsentiert wird. Die zwölf Ungleichungen der Tafel a lassen sich jetzt mit Hilfe der durch (6) und (9) eingeführten Koordinaten x, y und p ausdrücken. So ergeben sich die zwölf Ungleichungen der Tafel c. Während sich in den Ungleichungen der Gruppe (a), die dem



Figur 2

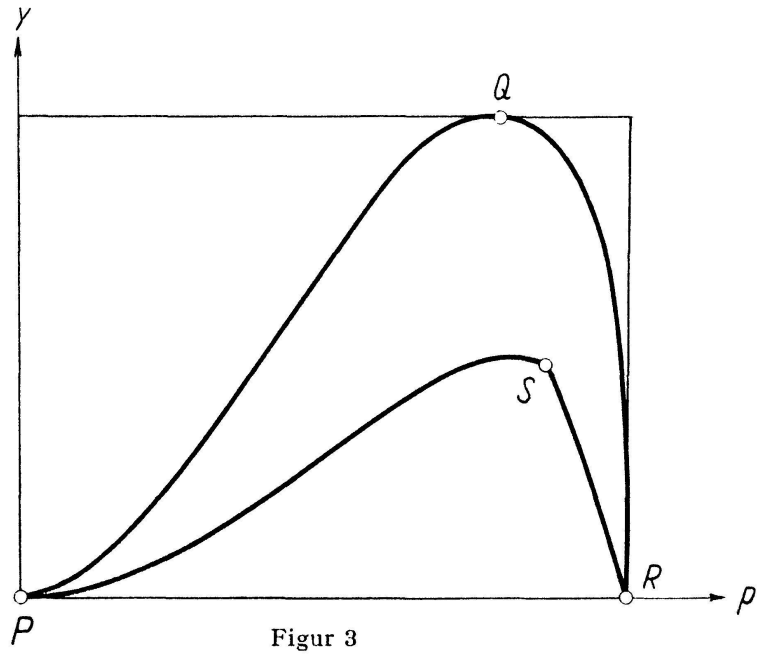
	P	Q	R	S
x	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$\frac{8}{\pi^2} = 0{,}810$	$\frac{16\,\sigma}{(2\,\pi + \sigma - 2)^2} = 0{,}857$
p	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$\frac{4}{\pi} = 1{,}273$	$\frac{8}{2\,\pi + \sigma - 2} = 1{,}201$

Nebenproblem (V, F, a) entspricht, alle drei Koordinaten beteiligen, können diejenigen der Gruppen (b) und (c) durch je zwei ausgedrückt werden. Diese beiden den Nebenproblemen (F, M, a) und (M, V, a) zugehörenden vollständigen Ungleichungssysteme können in einer (x, p)-Ebene und in einer (y, p)-Ebene bildlich dargestellt werden. Es ergeben sich die in den Figuren 2 und 3 dargestellten Bereiche, die je von vier den Ungleichungen der betreffenden Gruppe entsprechenden Kurvenstücken berandet sind (vgl. auch die den Figuren beigefügten Koordinatentafeln).

6. Die Tafel c gibt uns nun die Mittel in die Hand, um x und y als Funktion von p zu diskutieren. Genauer: Wird das Rundungsmass p vorgeschrieben, so kann festgestellt werden, in welchen Intervallen x und y variieren können. Zur Vereinfachung

wollen wir hierzu nur die Ungleichungen der Gruppen (*b*) und (*c*) heranziehen[8]). Die fraglichen Intervalle für x bzw. y können in Figur 2 bzw. Figur 3 durch Schnittsehnen der dargestellten Bereiche mit Parallelen zur x-Achse bzw. y-Achse veranschaulicht werden. Dabei ist die jeweilige Zweiteilung des Intervalls für p zu beachten!

In der (x, y)-Ebene gedeutet, entspricht jedem Wert von p ein Rechteck, dessen Seiten durch die oben erörterten Intervalle gebildet ist. Die Bildpunkte der Rotationseikörper vom Rundungsmass p müssen alle in diesem Rechteck liegen; sie werden im allgemeinen das Rechteck nicht vollständig ausfüllen (vgl. hierzu die Bemerkungen



Figur 3

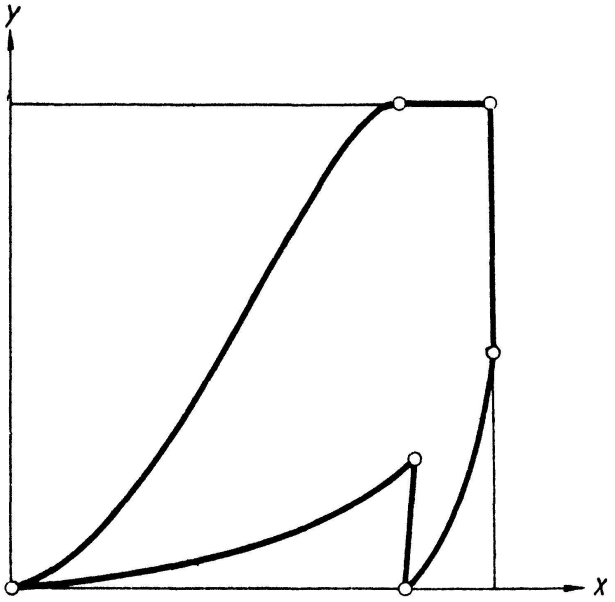
	P	Q	R	S
y	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$0 = 0{,}000$	$\frac{432\,\varrho}{(3\,\pi + \varrho)^3} = 0{,}487$
p	$0 = 0{,}000$	$1 = 1{,}000$	$\frac{4}{\pi} = 1{,}273$	$\frac{12}{3\,\pi + \varrho} = 1{,}103$

in Abschnitt 3). Bilden wir jetzt die Vereinigungsmenge aller Rechtecke, indem wir p von 0 bis $4/\pi$ variieren lassen, so erhalten wir einen Bereich $\tilde{\tilde{\boldsymbol{K}}}_0$ der (x, y)-Ebene, der jedenfalls den Bereich $\tilde{\boldsymbol{K}}_0$ als Teil enthält. Dieser sich durch Elimination von p ergebende Bereich $\tilde{\tilde{\boldsymbol{K}}}_0$ ist mit Figur 4 dargestellt. Die Elimination von p entspricht hier der im Abschnitt 3 erörterten Elimination von a.

Der obere Rand von $\tilde{\tilde{\boldsymbol{K}}}_0$, der weit über dem wahren, durch die Kappenkörper K gelieferten Randstück von $\tilde{\boldsymbol{K}}_0$ verläuft, ist nicht von Interesse. Ähnliches gilt für den

[8]) Die dadurch erreichbaren Ergebnisse könnten durch Einbezug der Ungleichungen der Gruppe (*a*) noch verbessert werden.

rechten Rand, der rechtsseitig von dem den Kugelschichten S entsprechenden wahren Randstück von $\tilde{\tilde{K}}_0$ liegt. Dagegen zeigt der untere Rand von $\tilde{\tilde{K}}_0$ die Existenz und die ungefähre Gestalt des wahren unbekannten Randstücks von $\tilde{K}_0$ (vgl. hierzu auch Figur 1). Insbesondere zeigt der Einschnitt, dass das erste beim Kreisscheibenpunkt ausmündende wahre Randstück nach rechts geneigt sein muss. Dies entspricht der bereits früher nachgewiesenen merkwürdigen Tatsache, dass das absolute Minimum von V bei vorgegebenem M und F unstetig verläuft, indem ja der kleinste Wert von y an der Stelle $x = 8/\pi^2$ als Funktion von x unstetig ist [9]).



Figur 4

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BIERI, H., *Mitteilung zum Problem eines konvexen Extremalkörpers*, Arch. Math. *1*, 462–463 (1948/49).

[2] BIERI, H., *Ein (M, F)-Problem mit Nebenbedingungen*, Experientia *12*, 369–375 (1956).

[3] BLASCHKE, W., *Eine Frage über konvexe Körper*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *25*, 121–125 (1916).

[4] HADWIGER, H., *Beweis einer Extremaleigenschaft der symmetrischen Kugelzone*, Portugaliae Math. *7*, 74–85 (1948).

[5] HADWIGER, H., *Elementare Studie über konvexe Rotationskörper*, Math. Nachr. *2*, 114–123 (1949).

[6] HADWIGER, H., *Neue Ungleichungen für konvexe Rotationskörper*, Math. Ann. *122*, 175–180 (1950).

[7] HADWIGER, H., *Altes und Neues über konvexe Körper* (Birkhäuser, Basel 1955).

[8] HADWIGER, H., *Über eine vollständige Schar extremaler konvexer Rotationskörper*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *59*, 7–12 (1956).

[9] HADWIGER, H., und BIERI, H., *Eine Unstetigkeitserscheinung bei extremalen konvexen Rotationskörpern*, Math. Nachr. *13*, 19–24 (1955).

H. HADWIGER und H. BIERI, Bern

[9]) Vgl. hierüber den Aufsatz [9].