Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 5

Artikel: Über eine spezielle Hüllkurve
Autor: Trost, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19212

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XII Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 10. September 1957

Über eine spezielle Hüllkurve

Eine bewegliche Gerade g schneide die Schenkel OA, OB eines festen Winkels in den Punkten A^*, B^*. Erfolgt die Bewegung so, dass die Fläche des Dreiecks OA^*B^* konstant bleibt, so hüllt g eine Hyperbel mit den Asymptoten OA, OB ein. Der Mittelpunkt der «Sehne» A^*B^* ist dabei der Berührungspunkt.

Ersetzt man den Winkel durch einen zusammenhängenden Streckenzug $\mathfrak{S}$, bei dem die Steigung der Teilstrecken monoton variiert, und bewegt g wieder so, dass flächengleiche Polygone abgeschnitten werden, so entsteht eine aus Hyperbelbogen zusammengesetzte Hüllkurve $\mathfrak{C}$. Je zwei benachbarte Hyperbelbogen berühren sich, so dass die Tangente von $\mathfrak{C}$ stetig ist. Die Berührungspunkte mit g sind wieder die Mittelpunkte der durch die Schnittpunkte von g mit $\mathfrak{S}$ bestimmten Sehnen.

Geht $\mathfrak{S}$ in einen differenzierbaren Kurvenbogen ohne Wendepunkte über, so erkennt man, dass auch jetzt die Sehnen flächengleicher Segmente die Hüllkurve $\mathfrak{C}$ in den Mittelpunkten berühren. Diese allgemeine Aussage über $\mathfrak{C}$ kann auf folgende Weise analytisch verifiziert werden: Es sei $y = f(x)$ die Gleichung des gegebenen Kurvenbogens in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Endpunkte der Sehne und F der vorgegebene Inhalt der Segmentfläche, so gilt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}(x_2 - x_1) = \pm F. \tag{1}$$

Differentiation von (1) nach x_1 und x_2 gibt

$$\left.\begin{aligned} f(x_2)\,dx_2 - f(x_1)\,dx_1 - \frac{1}{2}\{f'(x_1)\,dx_1 + f'(x_2)\,dx_2\}(x_2 - x_1)& \\ - \frac{1}{2}\{f(x_1) + f(x_2)\}(dx_2 - dx_1) = 0.& \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzt man

$$x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y_M = \frac{1}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big),$$

so lässt sich (2) in der Form

$$\frac{dy_M}{dx_M} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

schreiben. Das bedeutet, dass die von den Sehnenmittelpunkten M gebildete Kurve die Sehnen berührt und somit mit $\mathfrak{C}$ zusammenfällt. Die Bestimmung von $\mathfrak{C}$ wird durch diese Bemerkung oft erleichtert. Wir geben dafür einige Beispiele.

1. $y = x^3$ $(x \geqq 0)$: Man hat

$$F = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1^3 + x_2^3) - \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^3 (x_2 + x_1).$$

Hieraus folgt

$$x_2 - x_1 = \sqrt[3]{\frac{2F}{x_M}}, \qquad x_1 x_2 = x_M^2 - \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{4F^2}{x_M^2}}.$$

Wegen

$$\frac{1}{2}(x_1^3 + x_2^3) = \left\{(x_1 + x_2)^2 - 3 x_1 x_2\right\} x_M$$

ergibt sich

$$y_M = x_M^3 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{4 F^2 x_M}.$$

Die durch diese Gleichung bestimmte Kurve stellt $\mathfrak{C}$ für

$$x_M \geqq \frac{1}{2}\sqrt[4]{4F}$$

dar.

2. $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$: Aus

$$F = \cos x_1 - \cos x_2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(\sin x_1 + \sin x_2)$$

ergibt sich, wenn man $x_2 - x_1 = 2t$ setzt,

$$\frac{F}{2 \sin x_M} = \sin t - t \cos t. \tag{3}$$

Einzelne Punkte von $\mathfrak{C}$ können nun mit der Beziehung

$$y_M = \frac{1}{2}(\sin x_1 + \sin x_2) = \cos t \sin x_M$$

berechnet werden, wobei t für jeden zulässigen Wert von x_M aus der transzendenten Gleichung (3) bestimmt werden muss. Dabei gilt $x_0 \leqq x_M \leqq \pi - x_0$, wo sich x_0 aus der Gleichung berechnet, die entsteht, wenn in (3) $t = x_M = x_0$ gesetzt wird. Natürlich ist damit auch eine Parameterdarstellung von $\mathfrak{C}$ gegeben. Die Grenzen des Parameterintervalls werden aus (3) erhalten, indem man $x_M = \pi/2$ bzw. $x_M = x_0 = t$ setzt.

3. $y = e^x$: Multiplizieren wir die Flächenbedingung

$$F = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(e^{x_1} + e^{x_2}) - (e^{x_2} - e^{x_1})$$

mit e^{-x_M} und setzen wieder $x_2 - x_1 = 2t$, so erhalten wir

$$e^{-x_M} F = 2\,(t\cosh t - \sinh t)\,. \tag{4}$$

Als «Gleichung» von $\mathfrak{C}$ dient jetzt die Beziehung

$$y_M = \frac{1}{2}\,(e^{x_1} + e^{x_2}) = e^{x_M}\cosh t\,,$$

wo t für jeden Wert von x_M aus (4) bestimmt werden kann. Auch hier lässt sich sofort eine Parameterdarstellung anschreiben.

Diese Beispiele zeigen, dass die Natur von $\mathfrak{C}$ im allgemeinen ziemlich verwickelt ist. Hingegen gilt folgender, anscheinend nicht allgemein bekannter[1]) Satz: *Die Hüllkurve $\mathfrak{C}$ eines Kegelschnitts ist ein ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitt, wobei der Ähnlichkeitspunkt der (im Endlichen oder unendlichfern liegende) Mittelpunkt des Kegelschnitts ist.*

Dieser Satz ist trivial für den Kreis, und mit einer Affinität lässt er sich sofort auf die Ellipse übertragen.

Im Fall der Hyperbel genügt es, die gleichseitige Hyperbel $y = a\,x^{-1}$ zu betrachten. Setzt man $x_2 = t\,x_1$, so ist

$$\frac{F}{a} = \frac{1}{2}\,(x_1^{-1} + x_2^{-1})\,(x_2 - x_1) - \ln\frac{x_2}{x_1} = \frac{t^2-1}{2t} - \ln t\,. \tag{5}$$

Für $F \neq 0$ besitzt diese transzendente Gleichung eine Lösung $t \neq 1$. Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus der Beziehung

$$x_M\,y_M = \frac{a\,(x_1+x_2)^2}{4\,x_1\,x_2} = \frac{a\,(t+1)^2}{4t}\,.$$

Das Ähnlichkeitsverhältnis ist

$$\lambda^* = \frac{t+1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Es ist nun allerdings möglich, dieses Resultat aus den Eigenschaften des Kreises zu gewinnen, wenn man die durch die Relationen

$$x = X, \quad y = i\,Y \quad (i^2 = -1)$$

bestimmte komplexe Affinität[2]) benutzt, die den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ in die gleichseitige Hyperbel $X^2 - Y^2 = r^2$ überführt. Der Flächeninhalt wird bei dieser Transformation mit i multipliziert, wie man sofort aus der Determinantenformel für den Inhalt der Dreiecksfläche sieht. Das (6) entsprechende Ähnlichkeitsverhältnis beim Kreis ist $\lambda = \cos\alpha/2$, wo α durch

$$S = \frac{r^2}{2}\,(\alpha - \sin\alpha)$$

---

[1]) Wenigstens, was die Hyperbel betrifft. Die Aussage für die Parabel findet man zum Beispiel in GRIMM und RUEFF, *Analytische Geometrie*, Leitfaden 1. Teil (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1952), S. 143.

[2]) Eine eingehende Studie dieser Affinität mit vielen Anwendungen gibt R. GOORMAGHTIGH (Supplément à Mathesis, N° 3–5, 1954). Den Hinweis auf diese Arbeit verdanke ich Herrn W. LÜSSY, Winterthur.

bestimmt ist. λ genügt also der Gleichung

$$\frac{S}{r^2} = \arccos\lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}. \tag{7}$$

Multipliziert man (7) mit i und setzt $i\,S = F$, so erhält man wegen

$$i\arccos\lambda = \operatorname{areacosh}\lambda = \ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{1-\lambda^2} = i\sqrt{\lambda^2-1}$$

die für die Hyperbel gültige Beziehung

$$\frac{F}{r^2} = \ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-1}\right) + \lambda\sqrt{\lambda^2-1}. \tag{8}$$

Setzen wir

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

und berücksichtigen, dass $r^2 = 2a$, so geht (8) bei richtiger Vorzeichenwahl in (5) über. Ferner ergibt sich wegen (6) $\lambda = \lambda^*$.

Im Falle einer Parabel $y = a\,x^2$ hat man

$$F = \frac{a}{2}\,(x_2 - x_1)\,(x_1^2 + x_2^2) - \frac{a}{3}\,(x_2^3 - x_1^3) = \frac{a}{6}\,(x_2 - x_1)^3. \tag{9}$$

Hieraus folgt

$$x_1\,x_2 = x_M^2 - \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{36\,F^2}{a^2}},$$

$$y_M = \frac{a}{2}\,(x_1^2 + x_2^2) = 2\,a\,x_M^2 - a\,x_1\,x_2 = a\,x_M^2 + \frac{1}{4}\sqrt[3]{36\,a\,F^2}.$$

$\mathfrak{C}$ ist also eine parallel zur y-Achse verschobene Parabel. Das kann auch leicht geometrisch eingesehen werden: Die zur Sehne AB parallele Tangente berührt die Parabel im Endpunkt P des Durchmessers durch den Sehnenmittelpunkt M. Das Parallelogramm, dessen eine Seite $\overline{AB}$ ist, während die andere gleich und parallel $\overline{MP}$ ist, hat den konstanten Flächeninhalt $3\,F/2$. Da nach (9) die zu $\overline{MP}$ senkrechte Parallelogrammhöhe konstant bleibt, muss auch $\overline{MP}$ konstant sein.

Die für den Kreis triviale Tatsache, dass die zu flächengleichen Segmenten gehörigen Tangentendreiecke (gebildet aus der Sehne und den Tangenten in den Endpunkten der Sehne) flächengleich sind, gilt auch für alle Kegelschnitte. Die Spitzen der Tangentendreiecke (Schnittpunkte der Tangenten) beschreiben ebenfalls einen zum Ausgangskegelschnitt ähnlichen und in bezug auf den Mittelpunkt ähnlich gelegenen Kegelschnitt. Das Ähnlichkeitsverhältnis ist dabei für Ellipse und Hyperbel reziprok zu dem zu $\mathfrak{C}$ gehörenden Wert. Bei der Parabel erfolgt die Parallelverschiebung um dieselbe Strecke nach unten wie für $\mathfrak{C}$ nach oben. Alle diese Aussagen können durch einfache Rechnungen verifiziert werden. Sie scheinen aber nur für die Kegelschnitte zu gelten.

E. TROST, Zürich