Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Nach L. FEJES TÓTH[4]) kennt man über das extremale Verhältnis beim Ellipsoid im Falle $k = 3$ die Schätzung

$$p_n(E) \leqq \frac{n-2}{8\pi}(3 - \operatorname{ctg}^2\omega_n)\operatorname{ctg}\omega_n \qquad \left[\omega_n = \frac{n\pi}{6n-12}\right],$$

wobei Gleichheit für $n = 4$, $n = 6$ und $n = 12$ besteht. Die dem Ellipsoid einbeschriebenen Eipolyeder grössten Volumens sind affin zu den drei entsprechenden regulären Dreieckspolyedern. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 268. Consider the elements $1, 2, \ldots, n$ and let be given an integer k with $3 \leqq k \leqq n$. To be determined is the minimal system A of (i, j)-ambos $(1 \leqq i < j \leqq n)$ with the property that each combination

$$\mu_k \equiv (i_1, i_2, \ldots, i_k), \quad 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n$$

contains at least one ambo from A. PAUL TURAN, Budapest

Solution by the proposer: The required minimal system consists exactly of those ambos $(i\,j)$ with $i \equiv j \bmod (k-1)$ (*).

Proof: Let E be a system of ambos with the property that each μ_k-combination contains at least one ambo of E and $\bar{E}$ the complementary set of ambos. Hence the graph corresponding to $\bar{E}$ does not contain a complete subgraph of order k. If A is the *minimal* E-system, so is $\bar{A}$ the *maximal* system of ambos without a complete subgraph of order k. But according to my theorem in Colloquium Math. *3*, 19–30 (1954) $\bar{A}$ is identical with the complementary graph of (*), i.e., $\bar{A}$ is identical with the graph (*), which was to be proved.

Aufgabe 269. Let $\sigma(n)$ denote, as usual, the sum of the divisors of n. Prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n!+1)}{n!+1} = 1.$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada) and J. LAMBEK, Montreal

Lösung (nach Angaben des Aufgabenstellers): Es sei

$$N = n! + 1 = \prod_{p|N} p^e$$

die Primzahlzerlegung von N. Mittels der leicht verifizierbaren Ungleichung

$$p^{-2} + p^{-3} + \cdots + p^{-e} < p^{-1}$$

ergibt sich

$$\frac{\sigma(N)}{N} = \prod_{p|N}(1 + p^{-1} + p^{-2} + \cdots + p^{-e}) < \prod_{p|N}(1 + 2p^{-1}).$$

Es genügt also zu zeigen, dass das rechts stehende Produkt für $n \to \infty$ gegen 1 strebt. Wegen $\log(1 + 2p^{-1}) < 2p^{-1}$ ist

$$\log \prod_{p|N}(1 + 2p^{-1}) = \sum_{p|N} \log(1 + 2p^{-1}) < 2\sum_{p|N} p^{-1}.$$

Wir müssen jetzt also nur noch zeigen, dass $\sum p^{-1}$ für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass der kleinste Primfaktor von N grösser als

n ist, weil N bei der Division durch die $p \leqq n$ den Rest 1 lässt. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von N ist offensichtlich $< n$, denn sonst wäre ihr Produkt $> n^n > n!$.

Ist $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$, so gilt nach TCHEBYCHEFF[1])

$$C_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < C_2 \frac{x}{\log x}, \qquad C_1 < 1, \qquad C_2 > 1.$$

Ist ε eine beliebig kleine positive Zahl, so ergibt sich hieraus

$$\pi(n^{1+\varepsilon}) - \pi(n) > C_1 \frac{n^{1+\varepsilon}}{(1+\varepsilon)\log n} - C_2 \frac{n}{\log n} = n \left\{ \frac{C_1 n^\varepsilon}{(1+\varepsilon)\log n} - \frac{C_2}{\log n} \right\} > n,$$

denn $n^\varepsilon/\log n$ wächst mit n über alle Grenzen. Zwischen $n^{1+\varepsilon}$ und n liegen also für genügend grosses n mehr als n Primzahlen, unter denen insbesondere alle $p \mid N$ vorkommen müssen. Verwenden wir nun die bekannte Formel[2])

$$\sum_{p \leqq x} p^{-1} = \log\log x + 0{,}261 \ldots + o(1),$$

wo $o(1)$ eine für $x \to \infty$ verschwindende Grösse bedeutet, so gilt

$$\sum_{p \mid N} p^{-1} < \sum_{n \leqq p < n^{1+\varepsilon}} p^{-1} = \log[(1+\varepsilon)\log n] - \log\log n + o(1)$$

$$= \log(1+\varepsilon) + o(1) \to \log(1+\varepsilon).$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, ist $\sum p^{-1} \to 0$ bewiesen.

Aufgabe 270. P_n sei das Produkt, gebildet aus den Seiten und allen Diagonalen eines dem Einheitskreis eingeschriebenen n-Ecks. Welches ist der grösstmögliche Wert von P_n? E. TROST, Zürich

1. Lösung: Wir zeigen zuerst, dass das n-Eck regulär sein muss. Dazu dient folgendes Lemma: Bewegt sich ein Punkt P auf einem Kreisbogen AB, so ist das Produkt $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ maximal, wenn P den Bogen AB halbiert. (Das folgt daraus, dass dieses Produkt proportional der Fläche des Dreiecks ABP ist.)

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ seien die Ecken des n-Ecks in ihrer natürlichen Reihenfolge auf der Peripherie. Wir zerlegen P_n in $[n/2]$ Teilprodukte $P_n^{(k)}$. Ein solches enthalte als Faktoren alle Sehnen $A_i A_{i+k}$. Für $(n, k) = t$ bilden diese Sehnen t Vielecke mit je n/t Seiten. (Für $t < k$ sind es «Sternpolygone».) Wir beweisen nun: Lässt man die Ecken A_i so variieren, dass die Reihenfolge auf der Peripherie erhalten bleibt, so wird das Seitenprodukt eines solchen Vielecks (also $P_n^{(k)}$ oder ein Teilprodukt von $P_n^{(k)}$) bei gegebenem k maximal, wenn das Vieleck regulär ist. Angenommen, es sei $\overline{A_{i-k}A_i} \neq \overline{A_i A_{i+k}}$. Das Seitenprodukt wächst, wenn A_i gegen die Mitte des Bogens $A_{i-k}A_iA_{i+k}$ rückt. Sollte bei dieser Bewegung A_i auf einen Punkt A_s ($s = i \pm 1$) stossen, bevor diese Mitte erreicht ist, so kann man A_s im gleichen Sinn fortbewegen, wobei gleichzeitig auch das Produkt $\overline{A_{s-k}A_s} \cdot \overline{A_s A_{s+k}}$ zunimmt. Denn A_{s-k} folgt im gleichen Sinn auf die benachbarte Ecke A_{i-k} wie A_s auf A_i und A_{s+k} auf A_{i+k}. Ein k-Polygon (mit n/t Seiten) mit grösstem Seitenprodukt kann also nur regulär sein. Hieraus schliesst man fast unmittelbar auf die Behauptung über das Maximum von P_n.

Für das reguläre n-Eck ist P_n, als Wurzel aus der Diskriminante D der Gleichung $f(x) \equiv x^n - 1 = 0$, gleich $n^{n/2}$, da

$$D = \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i) = \prod_{i=1}^{n} (n\, \alpha_i^{n-1}) = n^n$$

($\alpha_i = n$-te Einheitswurzel). C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

---

[1]) E. TROST, *Primzahlen* (Birkhäuser Verlag 1953), S. 54, Satz 28.

[2]) E. TROST, *Primzahlen* (Birkhäuser Verlag 1953), S. 49, Satz 23.

2. Lösung: Werden die n Ecken des Polygons durch auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene liegende Punkte $z_1, \ldots, z_n$ dargestellt, so ist P_n gleich

$$\left| \prod_{\substack{i,k=1 \\ i>k}}^{n} (z_i - z_k) \right|$$

und damit gleich dem absoluten Betrag der Vandermondeschen Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Nach der Hadamardschen Determinantenabschätzung folgt

$$P_n^2 \leqq \prod_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{n-1} |z_k^p|^2 = n^n.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn jede Zeile der Determinante zum konjugiert Komplexen jeder anderen Zeile orthogonal ist, das heisst wenn

$$\sum_{p=0}^{n-1} (z_i \bar{z}_j)^p = 0 \qquad (i \neq j).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $z_i \bar{z}_j$ eine n-te Einheitswurzel ist. Die Argumentendifferenz zwischen je zwei Punkten auf dem Einheitskreis ist dann ein Vielfaches von $2\pi/n$, das heisst, die Punkte bilden die Ecken eines regulären Polygons.

PETER HENRICI, Washington (USA)

Weitere Lösungen sandten O. BUCHTA, Brno (ČSR), und J. SCHOPP, Budapest.

Aufgabe 271. Man beweise die folgende Aussage: Aus einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge des gewöhnlichen Raumes lassen sich vier Punkte so auswählen, dass

$$\frac{V}{V_0} \geqq \frac{2\sqrt{3}}{9\pi} = 0{,}1225\ldots$$

ausfällt, wo V_0 den Inhalt (Lebesguesches Mass) der Punktmenge bezeichnet, der positiv vorausgesetzt wird, und V der Inhalt des von den vier Punkten gebildeten Tetraeders ist. Die angegebene Schranke kann nicht verbessert werden; das Gleichheitszeichen greift dann Platz, wenn die Punktmenge ein Ellipsoid ist. H. HADWIGER, Bern

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei A eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge vom positiven Inhalt $V_0 = V(A)$ und T ein von vier Punkten von A gebildetes, oder also ein A einbeschriebenes Tetraeder vom Inhalt $V = V(T)$, und es werde $p(A) = \sup V(T)/V(A)$ gesetzt, wo sich die Bildung der oberen Schranke über alle T bei festem A erstrecken soll. Bezeichnet $\hat{A}$ die konvexe Hülle von A, so gilt a) $p(A) \geqq p(\hat{A})$. Dies folgt daraus, dass sich offensichtlich zu einem $\hat{A}$ einbeschriebenen $\hat{T}$ immer ein A einbeschriebenes T finden lässt, so dass $V(T) \geqq V(\hat{T})$ ausfällt und dass weiter $V(A) \leqq V(\hat{A})$ gilt. Bezeichnet ferner $\bar{A}$ die konvexe, durch eine Steinersche Symmetrisierung an einer Ebene E aus der konvexen Menge A hervorgehende, bezüglich E symmetrische Menge, so gilt b) $p(A) \geqq p(\bar{A})$. Ist nämlich $\bar{T}$ dem konvexen Körper $\bar{A}$ einbeschrieben und bedeutet $\bar{T}_0$ das bezüglich E zu $\bar{T}$ symmetrische Tetraeder und erzeugt man die beiden A einbeschriebenen Tetraeder T und T_0 dadurch, dass man die je einen Eckpunkt von $\bar{T}$ und $\bar{T}_0$ enthaltenden Symmetrisierungsstrecken in $\bar{A}$ längs der au E ofrthogonal stehenden Symmetrisierungsgeraden samt den Eckpunkten in die ursprüngliche bezüglich E unsymmetrische Lage in A zurückverschiebt, so gilt die mit einigen elementaren Schlüssen verifizierbare Ungleichung

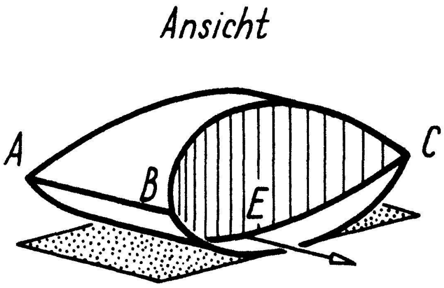
$$V(T) + V(T_0) \geqq V(\bar{T}) + V(\bar{T}_0);$$

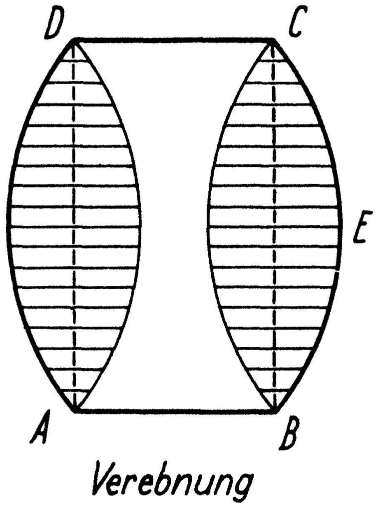
wenn die Orientierung der Tetraeder bei der erwähnten Schiebung nicht ändert, steht sogar das Gleichheitszeichen[3]).

Hieraus folgt, dass es zu einem $\bar{A}$ einbeschriebenen $\bar{T}$ immer ein A einbeschriebenes T so gibt, dass $V(T) \geqq V(\bar{T})$ ausfällt. Mit Rücksicht auf $V(A) = V(\bar{A})$ folgt so die Behauptung b). Da man bekanntlich durch fortgesetzte Symmetrisierungen einen konvexen Körper allmählich in eine inhaltsgleiche Kugel verwandeln kann, schliesst man mit einfachen Stetigkeitsbetrachtungen aus b) auf c) $p(A) \geqq p(K)$, wo A ein konvexer Körper und K eine Kugel ist. Mit a) und c) folgt für eine beliebige abgeschlossene und beschränkte Menge $p(A) \geqq p(K) = 2\sqrt{3}/9\,\pi$, wobei noch berücksichtigt ist, dass das der Kugelfläche einbeschriebene reguläre Tetraeder unter allen der Kugel in unserem Sinne einbeschriebenen Tetraedern den grössten Inhalt aufweist. Damit ist das Bestehen der Behauptung der Aufgabe erwiesen. Das Gleichheitszeichen gilt für die Kugel und wegen der Affininvarianz des Funktionals p auch für das Ellipsoid.

Neue Aufgaben

300. Eine Tintenfabrik brachte kürzlich zu Reklamezwecken eine zusammenfaltbare Löschwiege aus Karton heraus, die sich durch Herausklappen der beiden seitlichen (in der Figur schraffierten) Stützwände, welche nur mit dem Rückenteil zusam-





menhängen, vollkommen verebnen lässt. Was lässt sich über die Randkurven dieser Stützwände aussagen, wenn sie in der Verebnung als kongruente Kreisbögen vorausgesetzt werden? W. WUNDERLICH, Wien

301. Schneiden zwei Kugeln K_1, K_2 mit den Radien r_1, r_2 ($r_1 \geqq r_2$) sich gegenseitig an, so entstehen folgende Körper $\mathfrak{K}$: 1. Der K_1 und K_2 gemeinsame Stosskörper S. 2. Der Vereinigungskörper $V = K_1 + K_2 - S$. 3. Der Restkörper der grösseren Kugel $R_1 = K_1 - S$. 4. Der Restkörper der kleineren Kugel $R_2 = K_2 - S$. Unter der Dicke d eines Körpers $\mathfrak{K}$ verstehe man im Fall von S und V die Summe, im

[3]) Dieser Kunstgriff findet sich bei W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, II, 1. und 2. Aufl. (Springer, Berlin 1923), S. 191 und 51.

Fall von R_1 und R_2 die Differenz der Höhen der Kugelsegmente, aus denen $\mathfrak{K}$ durch Addition bzw. Subtraktion entsteht.

Man beweise: Es gibt genau zwei verschiedene Werte d_1 und d_2 für die Dicke eines Körpers $\mathfrak{K}_0$ mit vorgegebenem Volumen V_0 und vorgegebener Oberfläche F_0, sofern die isoperimetrische Ungleichung $F_0^3 > 36\,\pi\,V_0^2$ erfüllt ist. Sowohl für d_1 als auch für d_2 lässt sich $\mathfrak{K}_0$ auf unendlich viele Weisen in jeder der Formen S, V, R_1, R_2 realisieren.

Die Realisierungen S und V bzw. R_1 und R_2 werden durch Ungleichungen für $r_1 + r_2$ bzw. $r_1 - r_2$ bestimmt. Wie lauten diese Ungleichungen? E. TROST, Zürich

302. a) Es sei eine unendliche Punktmenge p_i $(1 \leqq i < \infty)$ gegeben, die im Endlichen keinen Häufungspunkt hat. K_m sei der grösste Kreis mit dem Mittelpunkt p_m, der im Innern keinen andern Punkt p_i enthält. Dann gibt es mindestens einen Punkt p_m mit der Eigenschaft, dass auf der Peripherie von K_m höchstens 6 Punkte p_i liegen.

b) Wenn die Punktmenge p_i $(1 \leqq i \leqq n)$ endlich ist, so gibt es einen Punkt p_m so, dass auf der Peripherie von K_m höchstens 3 Punkte liegen.

P. ERDÖS und D. TAMARI, Haifa

303. Man betrachte diejenigen Dreiecke mit verschiedenen Seitenlängen, bei denen die Masszahlen der Strecken, die auf den Seiten von den inneren Winkelhalbierenden abgeschnitten werden, ganzzahlig sind. Unter diesen Dreiecken ist dasjenige zu bestimmen, dessen Umfangsmasszahl ein Minimum ist. J. SCHOPP, Budapest

304. Man zeige: Sind a, b, c, d natürliche Zahlen, die der Bedingung $a\,b = c\,d$ genügen, dann ist

$$a = (a, c) \cdot (a, d) : (a, b, c, d).$$

R. LAUFFER, Graz

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die Zahl 100 ist so darzustellen, dass alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal verwendet werden.

   $\left[\text{Viele Lösungen, zum Beispiel: } 31 + 50 + 9 + \frac{2}{4} + \frac{76}{8} = 100.\right]$

2. Die Zahlen 4761, 447561, 44475561, 4444755561 usw. sind ausnahmslos Quadratzahlen.

   [Beweis zum Beispiel durch vollständige Induktion.]

3. Drei Maßstäbe A, B, C liegen wie die Skalen eines Rechenschiebers so übereinander, dass die Nullpunkte übereinstimmen. A trägt eine genaue Millimeterteilung, B eine regelmässige Teilung mit Abständen von 16/17 mm, C eine solche mit Abständen von 28/27 mm. Bei welchen Marken auf A, B, C liegen zum erstenmal wieder drei Teilstriche senkrecht übereinander?

   [112; 119; 108.]

4. w_α, w_β, w_γ sind die inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC. Spiegelt man irgendeinen Punkt P der Seite AC an w_α, den gefundenen Punkt an w_β, den neuen Punkt an w_γ, und so weiter, so kommt man stets nach sechsmaligem Spiegeln auf P zurück, ausgenommen, wenn P Berührungspunkt des Inkreises ist, wo dreimaliges Spiegeln genügt. – Konstruiere ein Dreieck, von dem eine Ecke und die Träger der drei inneren Winkelhalbierenden gegeben sind.

5. In einer Ebene E_1 ist ein Kreis $K_1(r_1)$ gegeben, in einer Ebene E_2 der Kreis $K_2(r_2)$. Zeichne den geometrischen Ort des Punktes P, der gemeinsame Spitze zweier ähnlicher Kegel über den Grundflächen K_1 und K_2 ist. K_1 in Π_1, $M_1(8; 6; 0)$, $r_1 = 5$; K_2 in Π_2, $M_2(13; 0; 4)$, $r_2 = 2$.
[Die Strecken PM_1 und PM_2 verhalten sich wie die Radien, also ist ein erster geometrischer Ort für P die Apollonius-Kugel der Strecke M_1M_2 mit dem Verhältnis $r_1 : r_2$; die Höhen der Kegel verhalten sich ebenfalls wie die Radien, demnach ist ein zweiter geometrischer Ort für P ein Ebenenpaar durch die Schnittgerade von E_1 und E_2. Der gesuchte Ort besteht folglich aus zwei Kreisen.]

Literaturüberschau

A. Speiser: *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*

284 Seiten mit 43 Abbildungen und einer Farbtafel. Vierte, erweiterte und berichtigte Auflage
Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1956

Das allgemein beliebte und bewährte Speisersche Lehrbuch der Gruppentheorie, das nicht nur den endlichen Gruppen gewidmet ist, ist erfreulicherweise in einem neuen, schmucken Gewande wieder erschienen. Einen besonderen Vorzug bildete von jeher die Herleitung der Kristallklassen, die in der Neuauflage Krystallklassen heissen. Seit der 2. Auflage (1927) ist ein besonderes Kapitel, mit sehr schönen Bildern geschmückt, der Symmetrie der ebenen Ornamente gewidmet. In der vorliegenden 4. Auflage ist ein Anhang über die Herstellung von Gruppenbildern hinzugefügt, illustriert durch ein faszinierendes Titelbild, eine Freude für die Augen. *B. L. van der Waerden*

Ch. B. Chlapham: *Arithmetic for Engineers*

(The directly usefull Series) 540 Seiten. Chapmann and Hall, fünfte Auflage, London 1955

Einige Kapiteltitel: Gewöhnliche und Dezimalbrüche, Einfache Gleichungen, Gebrauch der Logarithmen, Flächen- und Volumenberechnung, Graphische Darstellungen, Der Rechenschieber, Trigonometrie. Das Werk steht hinsichtlich Niveau und Behandlung des Stoffes ungefähr auf der Stufe eines guten schweizerischen Gewerbeschulunterrichtes. Entsprechend dem Zweck des Buches wird der Stoff anhand von Aufgaben aus der Technik bearbeitet. Stellenweise wirkt das Vorgehen allerdings reichlich gekünstelt; etwa dann, wenn hinter der formalen Aufgabe «Vereinfache $v^2 - V^2 - (v - V)^2$» steht: «Dieser Ausdruck hat einen Zusammenhang mit Wasserturbinen!» *W. Prokop*

Alfred Frei: *Mathematik für den Praktiker*

1. Teil: Einführung in die Algebra als Hilfsmittel für die Lösungen beruflicher Aufgaben des Praktikers

64 Seiten. Selbstverlag des Verfassers, Basel 1953

Das Büchlein führt den Leser anhand einfachster «Textaufgaben» vom direkten Rechnen mit Zahlwerten zur Aufstellung und zum Gebrauch von Formeln sowie zur Behandlung von einfachen (linearen) Gleichungen. Die Handhabung der auf diesem anschaulichen und sehr ausführlich dargelegten Weg gewonnenen Gesetze der elementaren Arithmetik und Algebra wird jeweils noch an einigen formalen Beispielen eingeübt. Sehr zu schätzen ist, dass auch auf Dinge, welche oft – speziell vom Anfänger – als unwesentlicher Ballast und äusserliche Schikane empfunden werden, grosses Gewicht gelegt wird: Übersicht, Kontrollen, korrekte Schreibweise (aneinandergehängte Teilrechnungen, Bruchstriche, Indizes), Angabe der Einheiten und ähnliches. Für den im Titel zum Ausdruck kommenden Zweck ist das Büchlein gut geeignet. *W. Prokop*