Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1957)

Heft: 3

Rubrik: Literaturüberschau

2. Man betrachtet eine Schar paralleler Sehnen einer Ellipse. Welche dieser Sehnen bestimmt mit dem Ellipsenmittelpunkt ein Dreieck maximaler Fläche?
[Bildet man die Ellipse affin auf einen Kreis ab, so wird das maximale Dreieck rechtwinklig, in der Ellipse liegen folglich zwei Seiten in konjugierten Durchmessern.]
3. Jede Ellipsentangente schneidet den orthoptischen Kreis in Punkten, die auf konjugierten Durchmessern liegen.
[Die Strecke zwischen den Schnittpunkten ist Seite eines der Ellipse umschriebenen Rechtecks; bildet man die Ellipse affin auf einen Kreis ab, so geht das Rechteck in einen Rhombus über, dessen Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen.]
4. Man zieht eine beliebige Parabelsehne und zeichnet die Tangenten t_1, t_2 in ihren Endpunkten und t_3 parallel zu ihr. Die Strecke zwischen t_1 und t_2 auf jeder weiteren Tangente t wird von t_3 halbiert.
[Man betrachte ein affines Bild dieser Figur, in dem die Sehne senkrecht zur Achse steht. Die Bezeichnungen sollen dieselben bleiben. Der Umkreis des Dreiseits $t_1 t_2 t$ geht durch den Brennpunkt F, denn die Scheiteltangente t_3 ist Simsonsche Gerade des Dreiseits bezüglich F. Aus der Gleichheit von Peripheriewinkeln ergibt sich die Behauptung.]
5. Die Steinersche Ellipse eines Dreiecks ist diejenige Umellipse, deren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Dreiecks liegt. Legt man die Geraden durch irgendeinen Punkt der Steinerschen Ellipse und durch die Dreiecksecken, so schneiden diese die Gegenseiten in den Eckpunkten eines zweiten Dreiecks. Die Fläche dieses zweiten Dreiecks ist doppelt so gross wie die des ursprünglichen. (Vergleiche Aufgabe 215 dieser Zeitschrift.)
[Bildet man das gegebene Dreieck affin auf ein gleichseitiges ab, so geht die Steinersche Ellipse in den Umkreis des gleichseitigen Dreiecks über, und mit Hilfe ähnlicher Dreiecke ist der Satz leicht zu beweisen.]

Literaturüberschau

John von Neumann:

Mathematical Foundations of Quantum Mechanics

445 Seiten. Übersetzt aus der deutschen Ausgabe von Robert T. Beyer, Princeton University Press 1955

Mit dieser Übersetzung der *Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik* vom Jahre 1932 liegt das Werk in dritter Auflage vor. Dies Standardwerk der quantentheoretischen Literatur braucht nicht ausführlich vorgestellt zu werden. Wenn in der Einleitung vom Autor Stellung genommen wurde gegen die Verwendung der mathematisch nicht einwandfreien Diracschen δ-Funktion und an deren Stelle ein mathematisch strenges Operieren im Hilbert-Raum gefordert und gesetzt wurde, so kann nach 24 Jahren gesagt werden, dass die Entwicklung diese Forderung nicht erfüllt hat. Die δ-Funktion ist geblieben, und insofern ist der Ausgangspunkt des Buches nur mehr historisch interessant. Aber das Buch hatte sich von diesem Ausgangspunkt zu einer umfassenden Analyse von Methode und Tragweite der Quantentheorie überhaupt ausgeweitet. Die Untersuchung gipfelt in dem kühnen Nachweis, dass die in den Unbestimmtheitsrelationen ausgedrückte Durchbrechung des Kausalitätsprinzips nicht einer Lücke unseres physikalischen Erkennens überbunden werden kann, welche durch eine Vervollständigung der Theorie dereinst geschlossen werden könnte, sondern als endgültig hingenommen werden muss, es sei denn, die Aussagen der Theorie erwiesen sich als *falsch*. Die scharfe Herausarbeitung einer Zweiheit quantenphysikalischer Prozesse: in kausaler Bestimmtheit kontinuierlich ablaufender einerseits, statistisch sprunghafter andrerseits, sei hier als weiteres Ergebnis der Analyse hervorgehoben.

Unmöglichkeitsbeweise entsprechen einer besonderen Stufe gedanklicher Kultur. Ist es schon im Fall der Quadratur des Kreises so, dass die Unmöglichkeit nur von einem recht kleinen Menschenkreis wirklich eingesehen werden kann und für manchen anderen der Beweis ein Nichts bedeutet, das ihn vom Suchen nach der Lösung nicht abzuhalten vermag, so ist die Stellung des von Neumannschen Beweises noch eine andere. Vor und nach dem Beweis haben Forscher allerersten Ranges – es seien EINSTEIN, VON LAUE, DE BROGLIE, SCHRÖDINGER genannt – die Theorie als unbefriedigend und unvollständig betrachtet, hat man nach «verborgenen Parametern» gesucht. Die vom Beweis ausgehende Überzeugungskraft erweist sich nicht als durchgreifend. Vor mehr als 20 Jahren schon hat GRETE HERMANN dem Gedankengang einen Zirkel vorgeworfen, und unbeschadet des Unmöglichkeitsbeweises mehren sich gerade in den letzten Jahren die Versuche, die Quantentheorie aus klassischen Vorstellungen herzuleiten. Kein Geringerer als DE BROGLIE ist daran beteiligt. In dieser Situation wird mancher Leser tief bedauern, dass die Neuauflage als unveränderter Neudruck – ins Englische übersetzt – herauskam. Die Fülle von Anmerkungen, welche in der ursprünglichen Auflage von den Hauptgedanken des Buches die Fäden zu weitern Aspekten der Probleme klärend spannte, ist ganz einfach auf dem Stand von 1932 stehengeblieben. VON NEUMANN muss in den späteren Lebensjahren weit weg von seinem Werke gestanden haben, das einst in einem Hochflug jugendlicher Genialität aus unmittelbarem Drinnenstehen im stürmischen Fortschritt der Theorie geschaffen wurde. Was damals dem Dahineilenden den Schwung des Gedankens vielleicht gebrochen hätte, wenn es hätte umgearbeitet werden sollen – die Kompliziertheit der Bezeichnung, welche das Formelbild gelegentlich zum Gestrüpp macht, die ausserordentliche Abstraktheit des Unmöglichkeitsbeweises, wodurch man nicht leicht ins klare kommt, «was man sich damit nun eigentlich gekauft hat» – sind ungeändert in die neue Auflage übernommen. Jetzt – nach dem Tode des Autors – wird man sie auch in unveränderter Form warm begrüssen.

Es ist noch zu bemerken, dass das Buch nicht gedruckt, sondern als photomechanische Reproduktion eines Manuskripts in Maschinenschrift herauskam. *G. A. Balastèr*

A. COMBES: *Exercices et Problèmes de Mathématiques*

Librairie Vuibert, Paris 1954

Aufgabensammlungen mit sorgfältig diskutierten Lösungen sind ein besonderes Merkmal der französischen mathematischen Schulliteratur. Sie bieten auch dem schweizerischen Lehrer stets eine Fülle von Anregungen. Wenn im vorliegenden Buch auf 372 Seiten 193 Aufgaben besprochen werden, so wird man daraus ersehen können, wie eingehend dies geschieht. Häufig wird in aufeinanderfolgenden Aufgaben ein Sachverhalt schrittweise entwickelt, wie zum Beispiel die Minimaleigenschaft des Höhenfusspunktsdreiecks.

Der Stoff entspricht ungefähr dem Gebiet, das in unseren Gymnasien im dritten und vierten Jahr in Algebra und Geometrie behandelt wird; die Aufgaben übersteigen aber häufig den bei uns üblichen Schwierigkeitsgrad. *Willi Lüssy*

MAX BORN: *L'Experience et la Théorie en Physique*

51 Seiten. Übersetzt von J.-P. MATHIEU. Gauthier-Villars, Paris 1955

Das Büchlein ist die ins Französische übersetzte Ausarbeitung eines Vortrages vor einem philosophischen und naturwissenschaftlichen Publikum in Newcastle upon Tyne vom Jahre 1943. Den Rahmen der Ausführungen bildet eine Auseinandersetzung mit der spekulativen Orientierung in der Naturwissenschaft, wie sie von EDDINGTON und in anderer Art von MILNE vertreten worden ist. EDDINGTONS Arbeiten scheinen aus dem Streben hervorgegangen, die wirkliche Welt mit der ausdenkbaren als kongruent zu erweisen. Demgegenüber zeichnet BORN im mittleren Teil seiner Ausführungen anhand einer reichen Folge repräsentativer Beispiele ein Bild der Entwicklung der Physik, in welchem sowohl die gedankliche Divination als die Befruchtung des Denkerischen durch unerwartete Erfahrungen und deren logische Verarbeitung zu ihrem Recht kommen. Ein gewisser Nachdruck liegt dabei auf der Methode der Induktion. Insofern die produktive Leistung des Denkens bei demjenigen Vorgang, der gewöhnlich «Abstraktion» genannt wird, nicht voll beachtet wird, ist die Darstellung einseitig, überzeugend dafür in Ausführungen, welche am Beispiel der Maxwell-Gleichungen zeigen: Heute sind wir imstande, diese Gleichungen gleichsam a priori – aus dem Minimalprinzip von MAUPERTUIS – aufzuschreiben, doch fehlte diesem Prinzip ganz einfach der Stoff, an dem es betätigt werden kann, wären nicht zuvor an der Erfahrung die Begriffe des Feldes, des Potentials usw. konzipiert worden.

Der Gang der Darstellung ist ein erfrischend lebendiger. Wo sie die Entwicklung der Theorie in diesem Jahrhundert betrifft, spürt man aus manchem belebenden oder erinnerungsträchtigen Wort, dass der Autor bei dieser Entwicklung mit dabei gewesen ist. Was hier und dort erzählerisch eingestreut ist, wirkt ungemein anregend, weil es von demjenigen zu sprechen vermag, was in den Forschern die Gedanken bewegte. Davon gewinnt auch die Darstellung früherer Etappen des Forschens, sei es der geometrischen Methode der Griechen oder eines Abschnittes der klassischen Physik. Man fühlt, wie die Revolution des physikalischen Denkens unseres Jahrhunderts – Relativitätstheorie, Quantentheorie – zu einem vertieften Durchdenken der früheren Errungenschaften Anlass gaben.

Das Schriftchen wird den Leser reich beschenken. *G. A. Balastèr*

F. HIRZEBRUCH:

Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie

165 Seiten, Ergebnisse der Mathematik, 9. Heft. Springer-Verlag, Berlin 1956

Der klassische Satz von RIEMANN-ROCH für eine komplexe algebraische Kurve gibt eine arithmetische Beziehung zwischen den Invarianten eines Divisors D (Grad, Dimension der Vollschar, welche D umfasst, und Spezialitätsindex) und dem Geschlecht der Kurve. Gewisse Verallgemeinerungen für algebraische Flächen und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten waren schon lange bekannt, ebenso einige Ansätze für den allgemeinen Fall. Der wichtigste Zweck des Buches von HIRZEBRUCH ist nun, eine vom Verfasser gefundene grossartige Verallgemeinerung des alten Satzes von RIEMANN-ROCH zu beweisen. In ihrer einfachsten Form gibt die Verallgemeinerung wieder eine arithmetische Beziehung zwischen Invarianten eines Divisors auf einer komplexen algebraischen Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension ohne Singularitäten und den Chernschen Klassen der Mannigfaltigkeit. Im Falle einer Kurve K gibt es im wesentlichen nur eine Chernsche Klasse. Diese ist dual zur Homologieklasse, welche von $2-2p$ Punkten auf K bestimmt wird, wo p das Geschlecht von K bedeutet. Dieser allgemeine Satz von RIEMANN-ROCH wird in einer Sprache formuliert, welche sich während der letzten Jahre in der Theorie der komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten als sehr fruchtbar erwiesen hat. Man spricht von Garben, Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer Garbe, komplexen Faserräumen, charakteristischen Klassen von CHERN und PONTRJAGIN und, was den formellen Teil anbelangt, den multiplikativen Reihen. Alle Begriffe werden sorgfältig definiert und erläutert. Erst nachdem alle benötigten Sätze erklärt und oft auch bewiesen sind, wird der Satz von RIEMANN-ROCH abgeleitet. Beim Beweis werden tiefliegende Resultate von THOM (Cobordismus), KODAIRA, SERRE und DOLBEAULT (über die Endlichkeit und das Verschwinden der Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in gewissen Garben) wesentlich benützt. Der Satz von RIEMANN-ROCH enthält als Spezialfall die Gleichheit des Toddschen und des arithmetischen Geschlechts einer algebraischen Mannigfaltigkeit. Es wird auf viele offene Fragen hingewiesen. Eine davon ist, ob der Riemann-Rochsche Satz, der nicht nur für algebraische Mannigfaltigkeiten, sondern für jede kompakte komplex-analytische Mannigfaltigkeit einen Sinn hat, in diesem allgemeinen Fall auch wirklich gilt.

Das Ergebnisheft von HIRZEBRUCH gibt eine ausgezeichnete Einführung in Methoden, die neuerdings in der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten entwickelt wurden. Wichtige Resultate des Verfassers und anderer Forscher sind darin erstmals in klarem Aufbau dargestellt. *A. J. H. M. v. d. Ven*

PADROT NOLFI: *Idee und Wahrscheinlichkeit*

215 Seiten. Editions du Griffon, Neuchâtel 1956

Das Buch befasst sich mit den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist an sich philosophischer Natur und mit erfrischender Lebendigkeit geschrieben. Der Verfasser, der gleichermassen Theoretiker und Praktiker ist, schreibt aus der Einsicht, dass der Forscher aus zwei Quellen schöpfen kann: aus dem Bereich der Ideen und aus seiner systematischen Arbeit. Darum hat er ganz bewusst die Idee, den schöpferischen Einfall in den Vordergrund gestellt. Das bedingt aber auch, dass er sich nicht enge auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie beschränken kann, sondern verschiedene Fragen der wissenschaftlichen Erkenntnis überhaupt berührt. «Die grösste Stärke des menschlichen Geistes liegt in der Fähigkeit, eine ideale fiktive Welt zu ersinnen. Die grösste Schwäche entpuppt sich in der Tatsache, dass keine solche fiktive Welt mit der realen Welt identisch ist. Das grösste Übel entsteht, wenn dieser Unterschied übersehen wird.» Mit diesem Zitat aus dem Buch glauben wir angedeutet zu haben, worauf es dem Verfasser ankommt. Auch wer nicht durchweg die Ansichten des Verfassers teilt und auch wer sich nicht speziell mit Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst, wird dieses sehr originelle Buch mit grossem Gewinn lesen. *H. Jecklin*

B. L. VAN DER WAERDEN: *Mathematische Statistik*

IX, 360 Seiten, 39 Figuren und 13 Tabellen. Springer-Verlag, Berlin 1957

Auch wenn der Verfasser nicht ausdrücklich darauf hinweisen würde, müsste dem aufmerksamen Leser bald klarwerden, dass dieses Buch kein Ergebnis lediglich theoretischer Überlegungen, sondern aus langjähriger Beschäftigung mit den praktischen Anwendungen hervorgegangen ist. So sind denn auch die zahlreichen Beispiele im Text nicht ad hoc konstruiert, sondern durchweg der Praxis entnommen. Gerade in dieser Hinsicht zeigt sich die praktische Gewandtheit des Verfassers, indem der Inhalt des Werkes nicht einseitig auf die Statistik eines Wissenszweiges, wie zum Beispiel Demographie, Biologie, Wirtschaft, ausgerichtet ist. Die verschiedenen statistischen Methoden werden nicht nur plausibel gemacht, sondern theoretisch begründet; lediglich bei schwierigeren Beweisen wird auf andere Lehrbücher Bezug genommen. In seiner klaren Gliederung eignet sich das Buch insbesondere auch zum Selbststudium für Leser, die in der Analysis grundsätzlich Bescheid wissen. Den etwas höher liegenden mathematischen Hilfsmitteln ist ein besonderes Kapitel eingeräumt. Im übrigen wird der Leser, ausgehend von einer kurzen, aber hinreichenden Darlegung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Grundlagen der mathematischen Statistik, so weit gefördert, dass er die wichtigsten Methoden moderner mathematischer Statistik kennenlernt und in der Lage ist, dieselben kritisch anzuwenden. Die für die Praxis unumgänglichen Tabellen ergänzen das Buch zu einem statistischen Vademekum. Wer immer sich für mathematische Statistik interessiert, wird das Werk, das eine persönliche Note und vielfach den Stempel eigener Forschung des Verfassers trägt, mit grossem Gewinn studieren. *H. Jecklin*

B. L. VAN DER WAERDEN: *Erwachende Wissenschaft*

(Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik). Aus dem Holländischen übersetzt von *Helga Habicht.* Mit Zusätzen vom Verfasser. 488 Seiten + 180 Abbildungen (Sammlung Wissenschaft und Kultur, Band 8). Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart 1956

Der Wunsch des Rezensenten K. VOGEL im *Zentralblatt für Mathematik* [*35*, 145/46 (1950)], dass das wichtige Werk VAN DER WAERDENS «einmal in deutscher Übersetzung vorliegen wird», ist durch den Verlag Birkhäuser nun erfüllt worden. Dieser damaligen Rezension ist ausser einigen allgemeinen Betrachtungen kaum etwas hinzuzufügen. Wenn ein Autor mit dem Blick des produktiven Mathematikers darangeht, das von den Historikern und Philologen so oft dargestellte Material der antiken exakten Wissenschaften, welche sich damals nur als Mathematik und mathematische Astronomie äusserten, erneut zu sichten und zu gliedern, so werden ihm gerade die Fachhistoriker Dank wissen, die bei einem universalgeschichtlichen Unterfangen selten über die Antike hinausgekommen sind, wie die Werke von SARTON, BRUNET, MIELI, ENRIQUES und anderen beweisen. Den allgemeinen kulturgeschichtlichen Gesichtspunkt lässt aber VAN DER WAERDEN bei seiner Darstellung nicht aus den Augen; anstatt sich jedoch in weitschweifige literarische Exkursionen zu verirrren, sagt er durch geschickt ausgewähltes Bildmaterial oder ausführliche historische Zeittafeln besser, was wo anders umständlich, ja meist gar nicht gesagt wird.

In formeller wie in materieller Hinsicht sind die bisherigen Gesamtdarstellungen unbefriedigend, weil sie einerseits die mathematische Problemanalyse zu wenig tief trieben und weil sie andererseits nicht über das Material der Vorantike verfügten, welches uns jetzt durch die Arbeiten von NEUGEBAUER, THUREAU-DANGIN und anderen zugänglich gemacht worden ist. Der Autor bringt in der Einführung (S. 19/20) selber eine Liste, was nun in den einzelnen Kapiteln als neu anzusehen ist. Hiervon sei nur die eingehende Analyse der *Elemente* des EUKLID erwähnt, die sich immer als eine Kompilation von zeitlich und inhaltlich verschiedenen Bestandteilen entpuppen, von denen sich dann nachweisen lässt, dass das Buch VIII dem ARCHYTAS, das Buch X dem THEAITETOS zuzuschreiben ist, während die arithmetischen Bücher des EUKLID auf die Pythagoreer zurückgehen, welche ihrerseits wieder im Fluss der Tradition einer hochentwickelten babylonischen Arithmetik stehen. Das Kapitel V (Das goldene Zeitalter) bildet damit gewissermassen den Höhepunkt des Werkes, dessen Spannung auch sonst nirgends nachlässt, selbst dort, wo – ja vielleicht gerade deswegen – zu Exkursen geschritten wird, wie bei der besonders schönen Darstellung des Siegeszuges des indischen Ziffernsystems. Der Rezensent kann sich nicht allen Ansichten des Autors bedingungslos anschliessen, insbesondere nicht der These, dass die Babylonier stets bei der «biblischen» Näherung $\pi = 3$ stehengeblieben seien (S. 52 und 130), was schon aus allgemeinen historischen Gründen ganz unwahrscheinlich ist. BRUINS hat endlich 1950 (Revue Histoire des Sciences *3*, 301–314) anhand von bisher unedierten Keilschrifttexten des Louvre, die aus der *Mission française archéologique de Suse en Iran* stammen, zeigen können, dass und wie sich die Babylonier den «wissenschaftlichen» Näherungswert $\pi = 3^1/_8$ verschafft haben.

Leider enthält das vorzüglich ausgestattete Buch einige beim mathematischen Satz wohl kaum jemals ganz zu vermeidende Druckfehler, unter denen sich auch gröbere befinden, wie die Vertauschung von Figur 3 und 4 und die Verwechslung von Prisma und Pyramide auf Seite 227. *J. O. Fleckenstein*

C. G. J. JACOBI: *Canon arithmeticus*

432 Seiten. Akademie-Verlag, Berlin 1956, DM 46.–

Ist P ein Modul, zu dem es primitive Wurzeln g gibt, so lässt sich jeder der $\varphi(P)$ zu P teilerfremden Reste x mod$P$ in der Form $x \equiv g^{\mathrm{ind}\,x}$ (mod$P$), $1 \leqq \mathrm{ind}\,x \leqq \varphi(P)$, darstellen. Der Exponent, der «Index» von x, hat ähnliche Eigenschaften wie der Logarithmus einer reellen Zahl. Die 1839 von JACOBI herausgegebenen Index- und Numerustafeln sind längst vergriffen. Zudem enthalten sie zahlreiche Fehler, was naturgemäss eine Rechnung nicht nur ungenau, sondern vollständig unbrauchbar machen kann. Die Tabellen sind jetzt von W. PATZ neu berechnet worden, wobei durchweg das kleinste positive g zugrunde gelegt wird. Die Moduln P sind die Primzahlen, Primzahlpotenzen und doppelten Primzahlpotenzen unter 1000. Für die ungeraden Primzahlmoduln sind in der Neuausgabe Tabellen aufgenommen worden, die den Additions- und Subtraktionslogarithmen entsprechen und aus $\mathrm{ind}\,x$ direkt $\mathrm{ind}(x \pm 1)$ zu berechnen gestatten. Als Herausgeber zeichnet der verstorbene bekannte Zahlentheoretiker H. BRANDT. In seiner Einleitung beschreibt er zunächst die Berechnung der Tabellen und zeigt hierauf die vielen Anwendungsmöglichkeiten an 24 typischen Beispielen auf. Die Zahlentheoretiker der ganzen Welt werden dieses auch äusserlich sehr gediegene Werk freudig begrüssen. *E. Trost*