

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1957)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Ungelöste Probleme

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

a) Die vier Schnittpunkte  $1, 2, 3, 4$  von  $c^c$  und  $h^c$  (Figur 2) liegen auf einem konzentrischen Kreis  $f$ , dessen Radius die lineare Exzentrizität der beiden Kegelschnitte ist<sup>5)</sup>.  $f$  geht auch durch die Schnittpunkte von  $c_1$  und  $h_1$ .

b) Die etwa zum Brennpunkt  $F$  gehörenden Leitgeraden  $l_c, l_h$  von  $c^c$  bzw.  $h^c$  schneiden auf der gemeinsamen Hauptachse dieser Kegelschnitte eine Strecke  $L_c L_h$  aus, deren Mitte  $F$  ist.  $L_c, L_h$  sind die Scheitelkrümmungsmitten der Fokalkurven von  $c^c$  bzw.  $h^c$ . Der Kreis über dieser Strecke wird von den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von  $c^c$  und  $h^c$  mit deren gemeinsamer Mitte  $N$  berührt.

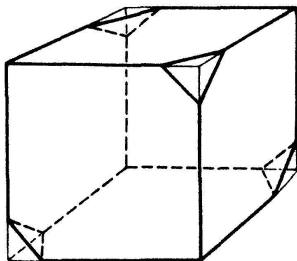
c) Ist  $g$  eine solche Verbindungsgerade, so schneidet sie die Hauptscheiteltangenten  $p, q$  von  $c^c$  und  $h^c$  in Punkten  $P_1$  bzw.  $Q_1$ , deren Entfernung von den Hauptscheiteln  $P, Q$  die Parameterstrecke von  $h^c$  bzw.  $c^c$  ist. Die Tangenten in den Endpunkten  $P'$  und  $Q'$  der Parametersehnen von  $h^c$  bzw.  $c^c$  gehen durch  $L_h$  bzw.  $L_c$  und schneiden sich auf der Geraden  $(12) = (1 \perp PQ)$  im Punkte  $T$ , dessen Normalabstand von  $z = (PQ)$  gleich ist der Strecke  $PQ$ .

d) Die zu  $c^c$  und  $h^c$  konzentrischen Kreise durch  $P_1$  bzw.  $Q_1$  schneiden die Hauptachse in den Krümmungsmitten der Hauptscheitel von  $h^c$  bzw.  $c^c$ . Führt man eine analoge Überlegung für die zu  $h^c$  konjugierte Hyperbel durch, so erhält man die Nebenscheitelkrümmungsmitten von  $c^c$ .

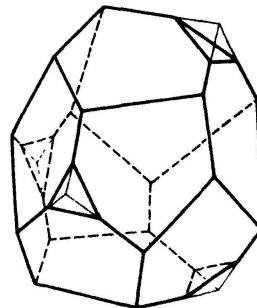
ERNST DOMKOWITSCH, Wien

## Ungelöste Probleme

**Nr. 17.** Die vorliegende Frage soll lediglich auf anschauliche Art formuliert und erörtert werden: Die beiden in Figur 1 und 2 abgebildeten konvexen Polyeder sind, wie zeichnerisch angedeutet, aus einem Würfel und einem Dodekaeder dadurch hervorgegangen, dass je vier passende Ecken abgeschnitten wurden. Die beiden resultierenden Polyeder haben ersichtlich die Eigenschaft, nur Seitenflächen mit



Figur 1



Figur 2

einer durch drei teilbaren Eckenzahl aufzuweisen. Vermutlich gilt allgemein die folgende Aussage:

*Ein beliebiges konvexes Polyeder lässt sich durch passendes Abschneiden von Ecken nach endlich vielen Schritten in ein Restpolyeder verwandeln, das lediglich Seitenflächen mit einer durch drei teilbaren Eckenzahl besitzt.*

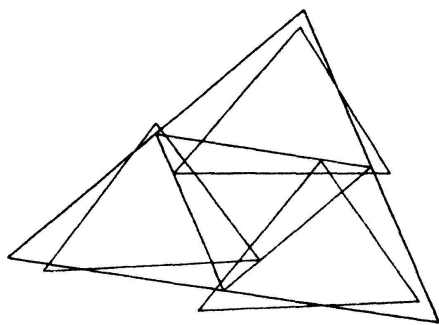
Da die beim Abschneiden einer Polyederecke neu entstehenden Eckpunkte dreikantig sind, kann man sich auf Dreikantpolyeder beschränken, da sich durch passende Schnitte stets zunächst ein solches erzeugen lässt. Die beim weiteren Schneidprozess neu hinzukommenden Seitenflächen sind dann stets dreieckig und genügen also der gestellten Forderung von selbst.

<sup>5)</sup> Man ermittelt  $1, 2, 3, 4$  direkt durch die Proclusche Ellipsenkonstruktion unter Benutzung der mit den Asymptoten  $a_1, a_2$  von  $h^c$  zusammenfallenden Scheitelkreisdurchmesser von  $c^c$ .

Die Schwierigkeit der scheinbar einfachen und geometrisch anschaulichen Fragestellung darf indessen nicht unterschätzt werden. Es stellt sich nämlich heraus, dass eine Beantwortung im wesentlichen mit der Lösung des Vierfarbenproblems gleichwertig ist! Es handelt sich um eine geometrische Einkleidung der bekannten Gleichwertigkeit der Vierfärbung einer Landkarte durch eine besondere Zweifärbung der Länderecken<sup>1)</sup>.

H. HADWIGER

**Nachtrag zu Nr. 15.** Herr L. DANZER (Freiburg i. Br.) hat gezeigt, dass sechs



kongruente Dreiecke in der Ebene so liegen können, dass von je vier Dreiecken stets drei einen nicht-leeren Durchschnitt haben, wobei es aber nicht möglich ist, die Dreiecksmenge so in zwei Teilmengen zu zerlegen, dass die ein und derselben Teilmenge angehörnden Dreiecke einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen (vgl. Figur). Damit ist bewiesen, dass, falls ein Satz der erörterten Art für beliebige Eibereiche tatsächlich gelten sollte, die Teilmengen-

anzahl nicht wie vermutet zwei, sondern wenigstens drei betragen müsste.

## Aufgaben

**Aufgabe 264.** H. TIETZE hat 1947 auf die Aufgabe hingewiesen, die  $m^n$  Teil-Einheitswürfel eines  $n$ -dimensionalen Würfels der Kantenlänge  $m$  so zu numerieren, dass die maximale Nummerndifferenz benachbarter Teilwürfel ihren minimalen Wert  $M$  annimmt.

a) Man gebe den genauen Wert von  $M$  an, falls unter benachbarten Teilwürfeln solche mit einer gemeinsamen Ecke verstanden werden.

b) Man gebe obere und untere Schranken für  $M$  an, wenn als benachbart nur Würfel mit einer gemeinsamen  $(n-1)$ -dimensionalen Seite angesehen werden.

H. LENZ, München

**Lösung:** Wenn  $r$  eine natürliche Zahl ist, soll  $I_r$  die Menge der natürlichen Zahlen  $\leq r$  sein. Wir betrachten die aus  $n$  Exemplaren  $I_m$  gebildete Produktmenge  $I_m^n$ . Sie besitzt  $m^n$  Elemente  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , wo alle  $x_i$  ( $1 \leq x_i \leq m$ ,  $1 \leq i \leq n$ ) ganz sind. Eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $I_m^n$  auf  $I_m^n$  soll eine Numerierung von  $I_m^n$  heißen. Wir wollen später die spezielle Numerierung

$$f_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^n (x_i - 1) m^{i-1} \quad (1)$$

benutzen. Wir denken uns weiter eine gewisse symmetrische (und reflexive) Relation zwischen zwei Elementen  $x$  und  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  aus  $I_m^n$  gegeben, welche durch « $x$  und  $y$  sind Nachbarn» ausgedrückt werde. Wenn  $f$  eine Numerierung ist, setzt man  $M_f = \max(|f(x) - f(y)|)$ , wo  $x, y$  alle Paare von Nachbarn durchläuft, und weiter  $M = \min(M_f)$ , wo  $f$  alle Numerierungen durchläuft. Wir denken uns weiter, dass die natürliche Zahl  $s$  so gewählt ist, dass man für beliebige Paare  $x, y$  in höchstens  $s$

<sup>1)</sup> Vgl. hier die ausführliche Darstellung des berühmten Vierfarbenproblems bei H. HASSE, *Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung* (Otto-Salle-Verlag, Frankfurt am Main, Pinneberg 1955), insbesondere die Ausführungen über die äquivalenten Probleme auf Seiten 77 bis 89.