

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1957)  
**Heft:** 3

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2. Wir greifen auf die dritte Untergruppe von § 3 zurück, setzen aber anstelle der beiden Zahlen  $a_1$  und  $a_2$  zwei Funktionen  $f_1(z)$  und  $f_2(z)$ . Setzt man voraus, dass die Gruppenmultiplikation eine Addition der Argumente  $z$  bedeutet, so hat man nach (2) und nach (4) die folgenden Funktionalgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} f_1^2(z) &= f_2^2(z) + 1, \\ f_1(z_1 + z_2) &= f_1(z_1) f_1(z_2) + f_2(z_1) f_2(z_2), \\ f_2(z_1 + z_2) &= f_1(z_1) f_2(z_2) + f_2(z_1) f_1(z_2). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Man erkennt sofort, dass eine Lösung sicher  $f_1(z) = \cosh z$ ,  $f_2(z) = \sinh z$  ist. Die Frage nach einer allgemeineren Lösung bleibt offen.

Ebenfalls bleibt die Frage nach Lösungen offen, wenn man in dem System der Funktionalgleichungen voraussetzt, dass die Gruppenmultiplikation nicht die Addition, sondern die Multiplikation der Argumente bedeutet.

In der Tat lassen sich die Hyperbelfunktionen durch die Gruppe aus den Gleichungen (16) heraus vollständig definieren.

3. Genau denselben Weg wie in Ziffer 2 gehen wir mit den beiden Funktionen  $g_1(z)$  und  $i g_2(z)$ . Die Funktionalgleichungen lauten nun

$$\left. \begin{aligned} g_1^2(z) &= -g_2^2(z) + 1, \\ g_1(z_1 + z_2) &= g_1(z_1) g_1(z_2) - g_2(z_1) g_2(z_2), \\ g_2(z_1 + z_2) &= g_1(z_1) g_2(z_2) + g_2(z_1) g_1(z_2). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Lösung  $g_1(z) = \cos z$  und  $g_2(z) = \sin z$  liegt klar auf der Hand. Sämtliche Bemerkungen und Fragestellungen der Ziffer 2 können sinngemäss übernommen werden. Man beachte vor allem den Hinweis, dass die Kreisfunktionen aus der Gruppe  $[g_1(z); i g_2(z); 1]$  heraus vollständig definiert und aufgestellt werden können.

Der Leser wird sicher selbst bemerkt haben, dass aus diesem Zusammenhang heraus die endlichen Untergruppen der Ziffer 4 in § 3 entstanden sind.

4. Abschliessend soll die Frage nach den allgemeinsten Funktionen  $h_1(z)$ ,  $h_2(z)$ ,  $h_3(z)$  aufgeworfen werden, die sich aus der Gruppe mit dem Element  $[h_1(z); h_2(z); h_3(z)]$  durch Aufstellung von Funktionalgleichungen mittels (2) und (4) ergeben.

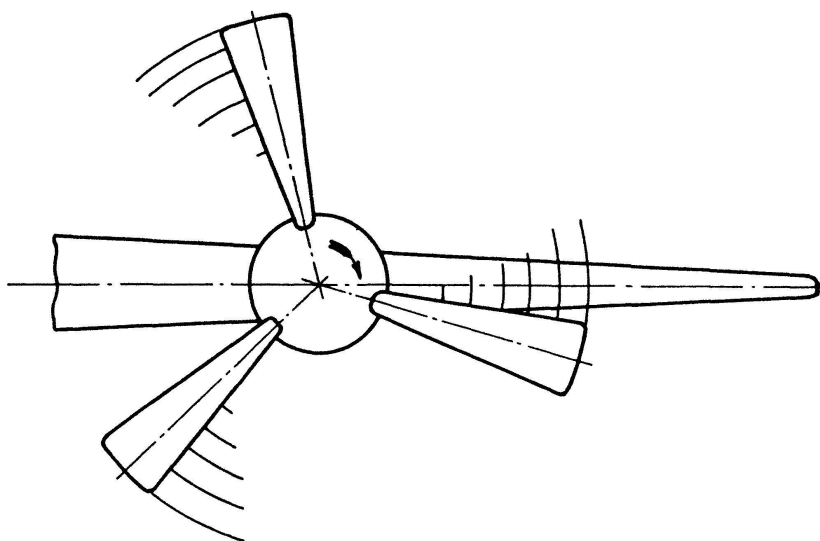
G. KIRSCHMER, München

## Kleine Mitteilungen

### Stosserregung der Welle einer Turbomaschine durch aerodynamische Kräfte

Der Zustrom oder der Abfluss eines Mediums einer Turbomaschine (Kompressor, Turbine usw.) enthält oft eine Störung der Drehsymmetrie. So wird zum Beispiel die Strömung hinter einem Flugzeugpropeller durch den Tragflügel in 2 Teile zerschnitten

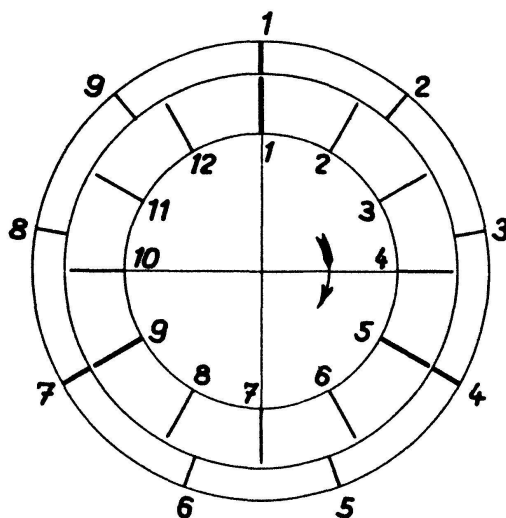
(Figur 1). Jedesmal wenn ein Propellerblatt am Flügel vorbeistreicht, erfährt es einen Stoss, der sich dann auf die Propellerwelle überträgt. Der Konstrukteur muss darnach trachten, diese Stösse möglichst schwach zu halten und ihre Frequenz ausserhalb jeder



Figur 1

Eigenfrequenz der Maschine (insbesondere der Torsionseigenfrequenzen der Propellerwelle) zu legen.

Dieses wichtige Problem der Technik ist nicht neu. Eine Darstellung findet sich im Buch *Technische Dynamik* von C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL (Springer-Verlag, erste Auflage 1939), S. 649. Da es aber eines der seltenen Probleme der Technik ist, das mit ganz elementaren zahlentheoretischen Hilfsmitteln gelöst werden kann, mag eine Veröffentlichung auch in dieser Zeitschrift von Nutzen sein.



Figur 2

Figur 2 stellt eine Turbomaschine schematisch dar. Die inneren radialen Striche bedeuten die Laufschaufeln der Maschine, die äusseren Striche bedeuten ruhende Störquellen, zum Beispiel Leitschaufeln. Es seien im ganzen  $l$  Laufschaufeln und  $s$  Störquellen gleichmässig über den Umfang verteilt. In Figur 2 ist  $l=12$  und  $s=9$ . In der gezeichneten Stellung des Laufrades steht die Laufschaufel Nr. 1 der Störquelle Nr. 1 gegenüber.

Ist  $(l, s)$  der grösste gemeinsame Teiler von  $l$  und  $s$ , so zerfällt der Kreis in  $(l, s)$  gleiche Sektoren, von denen jeder  $l/(l, s)$  Laufschaufeln und  $s/(l, s)$  Störquellen enthält. Dreht sich jetzt das Laufrad so weit, dass sich die Laufschaufel Nr. 1 vom Anfang des ersten Sektors bis zum Ende dieses Sektors bewegt, so erhält diese Laufschaufel  $s/(l, s)$  Stösse. Überhaupt erhält jede der  $l/(l, s)$  Laufschaufeln dieses Sektors  $s/(l, s)$  Stösse; von diesen fallen keine zwei Stösse zeitlich zusammen, sondern folgen sich in regelmässigen Zeitabständen. Bei dieser Drehbewegung werden also insgesamt

$$\frac{l}{(l, s)} \cdot \frac{s}{(l, s)}$$

Impulse von den Störquellen dieses Sektors über die Laufschaufeln auf die Welle übertragen. Da es  $(l, s)$  Sektoren gibt, erfährt die Welle bei einer vollen Umdrehung

$$\frac{l}{(l, s)} \cdot \frac{s}{(l, s)} \cdot (l, s)$$

Stösse. Bezeichnet man diese Anzahl der Stösse, die die Welle bei einer Umdrehung erleidet, mit  $n$ , und ist  $\{l, s\}$  das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von  $l$  und  $s$ , so ist also

$$n = \{l, s\}.$$

Gibt man dem Störimpuls, den die Welle erfährt, wenn eine einzige Laufschaufel an einer Störquelle vorbeigeleitet, die Grösse 1, so gilt für die gesamte Störintensität  $I$  der Welle

$$I = \{l, s\},$$

weil immer  $(l, s)$  Laufschaufeln gleichzeitig gestört werden. Will man diese Störintensität möglichst klein machen, so muss die Zahl der Laufschaufeln relativ prim zur Zahl der Störquellen sein.

W. KISSEL, Zürich

### Über die perspektive Abbildung von Kugeln

Wir betrachten zwei Kreise  $c_1(C, s)$ ,  $k_1(K, r)$  der Bildebene  $\pi$  als Distanzkreise zweier Perspektiven  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{R}$  (Figur 1). Unter bekannten Bedingungen<sup>1)</sup> ist der scheinbare Umriss  $c^c$  der Kugel  $\gamma$  über  $c_1$  («Distanzkugel») vermöge  $\mathfrak{R}$  eine Ellipse und der scheinbare Umriss  $k^c$  der Distanzkugel  $\kappa$  über  $k_1$  vermöge  $\mathfrak{C}$  eine Hyperbel. Die beiden Umrisskegelschnitte sind nach dem Dandelinischen Satz konfokal, wobei ihre gemeinsamen Brennpunkte  $F, G$  das innere bzw. äussere Ähnlichkeitszentrum von  $c_1$  und  $k_1$  darstellen<sup>2)</sup>. Wir behaupten:

*Die Nebenscheitel der Ellipse  $c^c$  fallen mit den reellen Vertretern der konjugiert imaginären Nebenscheitel der Hyperbel  $k^c$  zusammen.*

In einem Seitenriss normal zu  $z = (KC)$  durch  $C$  (Figur 1) erscheinen die erwähnten Kugeln als konzentrische Kreise  $\gamma'''$ ,  $\kappa'''$  und die parallel zu  $z$  legbaren Sehtangentialebenen an  $\gamma$  der Perspektive  $\mathfrak{R}$  als Tangentenpaar  $\tau_1'''$ ,  $\tau_2'''$  mit den Spuren  $t_1'''$ ,  $t_2'''$ . Aus den ähnlichen, rechtwinkligen Dreiecken  $C'''K'''U'''$  und  $t_1'''C'''U'''$  ( $K''' =$  Zentrum der Perspektive  $\mathfrak{R}$ ,  $U =$  Berührungspunkt von  $\tau_1$  mit  $\gamma$ ) berechnen wir die bekanntlich der wahren Länge der halben Nebenachse  $b$  von  $c^c$  gleiche Strecke  $t_1'''C'''$  zu  $b = rs/\sqrt{r^2 - s^2}$ . Üben wir bezüglich  $\kappa$  die Perspektive  $\mathfrak{C}$  aus, so entspricht dies rechnerisch der Ver-

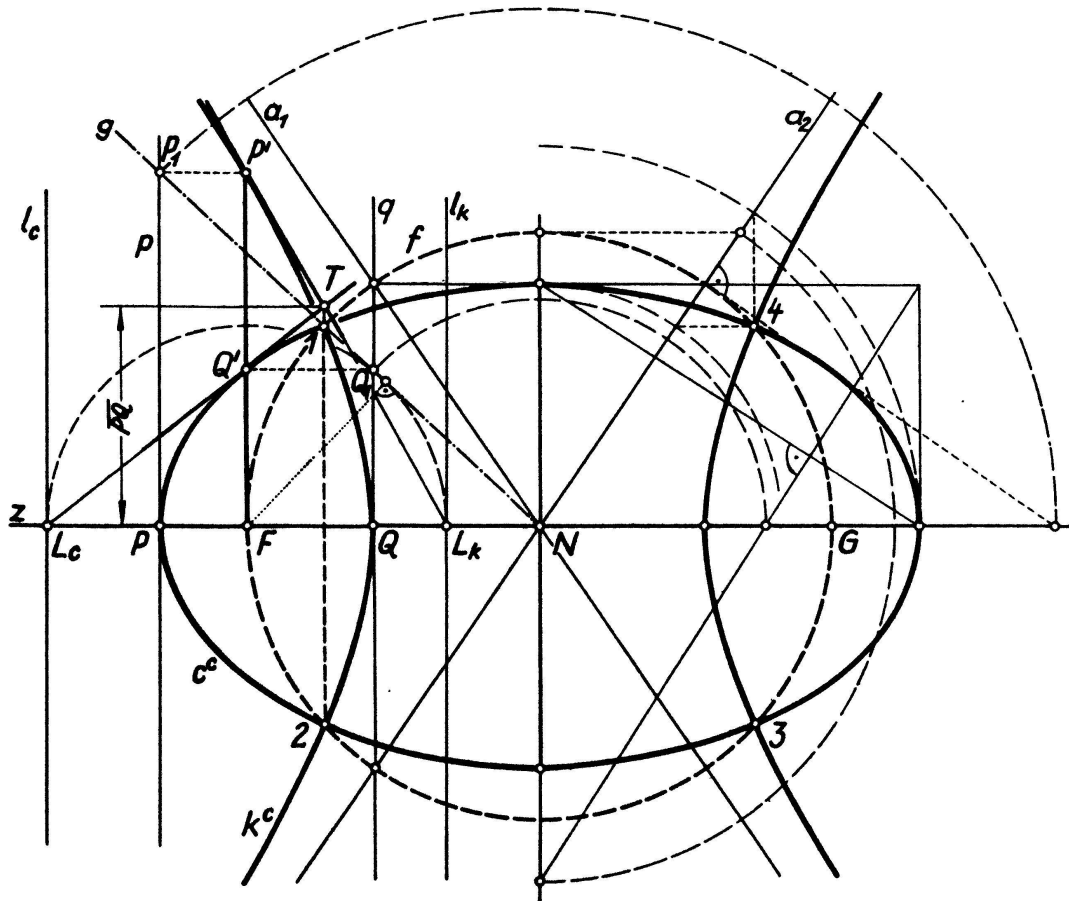
<sup>1)</sup> Vergleiche etwa MÜLLER-KRUPPA, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Springer, Wien 1948), S. 348.

<sup>2)</sup> Man bemerkt, dass Scharen konfokaler Kegelschnitte als scheinbare Umrisse von Kugelpaaren angesehen werden können, wobei je zwei Kugeln eines Paares bezüglich der Brennpunkte  $F, G$  zentrisch ähnlich liegen. Die Mitten dieser Kugeln erfüllen eine Involution mit den Doppelpunkten  $F, G$ .



scheiteln  $T_1, T_2$  berührt. Die Brennpunkte  $F, G$  von  $c^c$ , welche wir hier unter Benutzung der Endpunkte paralleler Durchmesser von  $c_1$  und  $k_1$  als deren Ähnlichkeitszentren finden, sind auch – je nachdem  $N_1N \lesseqgtr FN$  – die Haupt- bzw. Nebenscheitel von  $n^c$ . Aus den Spurpunkten  $N_1$  bzw.  $N_2$  ( $C \perp z$ ),  $c_1$  von  $n$ , die auch  $n^c$  angehören, und der Achse  $FG$  von  $n^c$  ermitteln wir die andere Achse  $T_1T_2$  durch die umgekehrte Papierstreifenkonstruktion.  $T_1T_2$  stimmt mit der Nebenachse von  $c^c$  überein, wodurch  $c^c$  wieder vollständig festliegt.  $c^c$  berührt bekanntlich  $c_1$  doppelt in den Schnittpunkten von  $c_1$  mit der Polaren von  $K$  bezüglich  $c_1$ .

B) *Hyperbolisches Kugelbild*. Wir fassen nun umgekehrt  $\gamma$  als Distanzkugel einer Perspektive  $\mathfrak{C}$  und  $\kappa$  als abzubildende Kugel auf. Der scheinbare Umriss  $k^c$  von  $\kappa$



Figur 2

Eigenschaften spezieller konfokaler Kegelschnitte.

ist dann eine Hyperbel, welche nach unseren einleitenden Überlegungen  $F$  und  $G$  ebenfalls als Brennpunkte und das durch das reelle Punktepaar  $T_1T_2$  angezeigte konjugiert imaginäre Punktepaar als Nebenscheitel besitzt. Wir können nun *mit denselben Konstruktionslinien wie bei A 1., 2. die Hyperbel  $k^c$  festlegen!  $k^c$  berührt bekanntlich  $k_1$  doppelt in den Schnittpunkten von  $k_1$  mit der Polaren von  $C$  bezüglich  $k_1$ .*

Man sieht, dass nach A 1. die Brennpunkte des scheinbaren Kugelummrisse *immer aus ordentlichen Schnitten hervorgehen* und nach A 2. *das Auftragen der Distanz an keine starre Richtung gebunden ist*. Diese Vorteile bietet das allgemein übliche, auf DANDELIN zurückgehende Verfahren nicht. Zudem sind die dargelegten Methoden *kürzer* als dieses und mithin sowohl von praktisch konstruktivem als auch pädagogischem Interesse.

Die speziellen konfokalen Kegelschnittspaare  $c^c$  und  $k^c$  besitzen eine Reihe interessanter metrischer Eigenschaften, welche konstruktiv verwertbar sind (die durchaus elementaren Beweise wurden unterdrückt):

a) Die vier Schnittpunkte  $1, 2, 3, 4$  von  $c^c$  und  $k^c$  (Figur 2) liegen auf einem konzentrischen Kreis  $f$ , dessen Radius die lineare Exzentrizität der beiden Kegelschnitte ist<sup>5)</sup>.  $f$  geht auch durch die Schnittpunkte von  $c_1$  und  $k_1$ .

b) Die etwa zum Brennpunkt  $F$  gehörenden Leitgeraden  $l_c, l_k$  von  $c^c$  bzw.  $k^c$  schneiden auf der gemeinsamen Hauptachse dieser Kegelschnitte eine Strecke  $L_c L_k$  aus, deren Mitte  $F$  ist.  $L_c, L_k$  sind die Scheitelkrümmungsmitten der Fokalkurven von  $c^c$  bzw.  $k^c$ . Der Kreis über dieser Strecke wird von den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von  $c^c$  und  $k^c$  mit deren gemeinsamer Mitte  $N$  berührt.

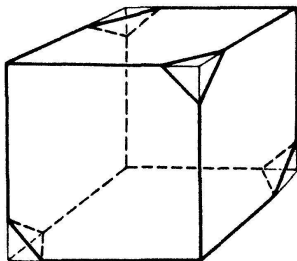
c) Ist  $g$  eine solche Verbindungsgerade, so schneidet sie die Hauptscheiteltangenten  $p, q$  von  $c^c$  und  $k^c$  in Punkten  $P_1$  bzw.  $Q_1$ , deren Entfernung von den Hauptscheiteln  $P, Q$  die Parameterstrecke von  $k^c$  bzw.  $c^c$  ist. Die Tangenten in den Endpunkten  $P'$  und  $Q'$  der Parametersehnen von  $k^c$  bzw.  $c^c$  gehen durch  $L_k$  bzw.  $L_c$  und schneiden sich auf der Geraden  $(12) = (1 \perp PQ)$  im Punkte  $T$ , dessen Normalabstand von  $z = (PQ)$  gleich ist der Strecke  $PQ$ .

d) Die zu  $c^c$  und  $k^c$  konzentrischen Kreise durch  $P_1$  bzw.  $Q_1$  schneiden die Hauptachse in den Krümmungsmitten der Hauptscheitel von  $k^c$  bzw.  $c^c$ . Führt man eine analoge Überlegung für die zu  $k^c$  konjugierte Hyperbel durch, so erhält man die Nebenscheitelkrümmungsmitten von  $c^c$ .

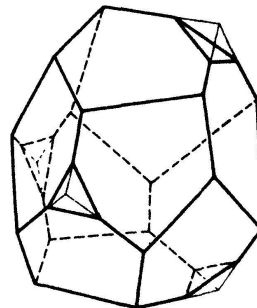
ERNST DOMKOWITSCH, Wien

## Ungelöste Probleme

**Nr. 17.** Die vorliegende Frage soll lediglich auf anschauliche Art formuliert und erörtert werden: Die beiden in Figur 1 und 2 abgebildeten konvexen Polyeder sind, wie zeichnerisch angedeutet, aus einem Würfel und einem Dodekaeder dadurch hervorgegangen, dass je vier passende Ecken abgeschnitten wurden. Die beiden resultierenden Polyeder haben ersichtlich die Eigenschaft, nur Seitenflächen mit



Figur 1



Figur 2

einer durch drei teilbaren Eckenzahl aufzuweisen. Vermutlich gilt allgemein die folgende Aussage:

*Ein beliebiges konvexes Polyeder lässt sich durch passendes Abschneiden von Ecken nach endlich vielen Schritten in ein Restpolyeder verwandeln, das lediglich Seitenflächen mit einer durch drei teilbaren Eckenzahl besitzt.*

Da die beim Abschneiden einer Polyederecke neu entstehenden Eckpunkte dreikantig sind, kann man sich auf Dreikantpolyeder beschränken, da sich durch passende Schnitte stets zunächst ein solches erzeugen lässt. Die beim weiteren Schneidprozess neu hinzukommenden Seitenflächen sind dann stets dreieckig und genügen also der gestellten Forderung von selbst.

<sup>5)</sup> Man ermittelt  $1, 2, 3, 4$  direkt durch die Proclusche Ellipsenkonstruktion unter Benutzung der mit den Asymptoten  $a_1, a_2$  von  $k^c$  zusammenfallenden Scheitelkreisdurchmesser von  $c^c$ .