Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 3

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. Wir greifen auf die dritte Untergruppe von § 3 zurück, setzen aber anstelle der beiden Zahlen a_1 und a_2 zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$. Setzt man voraus, dass die Gruppenmultiplikation eine Addition der Argumente z bedeutet, so hat man nach (2) und nach (4) die folgenden Funktionalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} f_1^2(z) &= f_2^2(z) + 1, \\ f_1(z_1 + z_2) &= f_1(z_1)\, f_1(z_2) + f_2(z_1)\, f_2(z_2), \\ f_2(z_1 + z_2) &= f_1(z_1)\, f_2(z_2) + f_2(z_1)\, f_1(z_2). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Man erkennt sofort, dass eine Lösung sicher $f_1(z) = \cosh z$, $f_2(z) = \sinh z$ ist. Die Frage nach einer allgemeineren Lösung bleibt offen.

Ebenfalls bleibt die Frage nach Lösungen offen, wenn man in dem System der Funktionalgleichungen voraussetzt, dass die Gruppenmultiplikation nicht die Addition, sondern die Multiplikation der Argumente bedeutet.

In der Tat lassen sich die Hyperbelfunktionen durch die Gruppe aus den Gleichungen (16) heraus vollständig definieren.

3. Genau denselben Weg wie in Ziffer 2 gehen wir mit den beiden Funktionen $g_1(z)$ und $i\, g_2(z)$. Die Funktionalgleichungen lauten nun

$$\left.\begin{aligned} g_1^2(z) &= -g_2^2(z) + 1, \\ g_1(z_1 + z_2) &= g_1(z_1)\, g_1(z_2) - g_2(z_1)\, g_2(z_2), \\ g_2(z_1 + z_2) &= g_1(z_1)\, g_2(z_2) + g_2(z_1)\, g_1(z_2). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Lösung $g_1(z) = \cos z$ und $g_2(z) = \sin z$ liegt klar auf der Hand. Sämtliche Bemerkungen und Fragestellungen der Ziffer 2 können sinngemäss übernommen werden. Man beachte vor allem den Hinweis, dass die Kreisfunktionen aus der Gruppe $[g_1(z);\, i\, g_2(z);\, 1]$ heraus vollständig definiert und aufgestellt werden können.

Der Leser wird sicher selbst bemerkt haben, dass aus diesem Zusammenhang heraus die endlichen Untergruppen der Ziffer 4 in § 3 entstanden sind.

4. Abschliessend soll die Frage nach den allgemeinsten Funktionen $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_3(z)$ aufgeworfen werden, die sich aus der Gruppe mit dem Element $[h_1(z);\, h_2(z);\, h_3(z)]$ durch Aufstellung von Funktionalgleichungen mittels (2) und (4) ergeben.

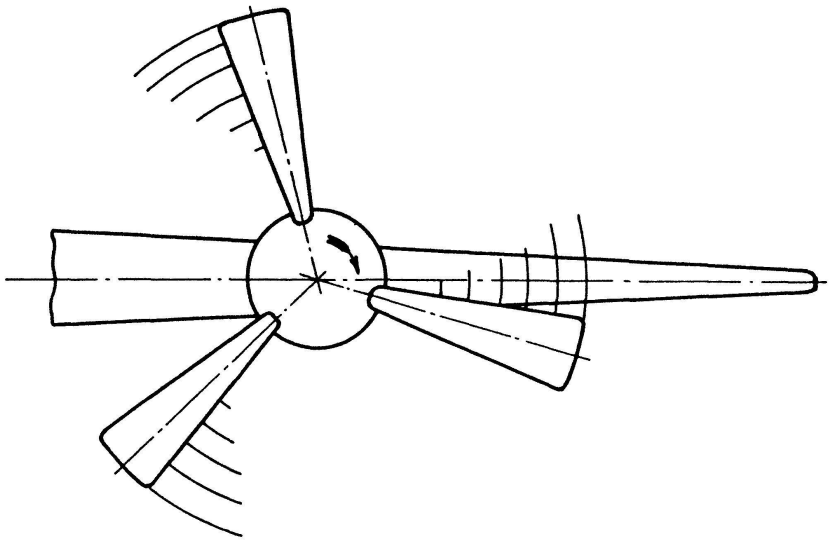
G. KIRSCHMER, München

Kleine Mitteilungen

Stosserregung der Welle einer Turbomaschine durch aerodynamische Kräfte

Der Zustrom oder der Abfluss eines Mediums einer Turbomaschine (Kompressor, Turbine usw.) enthält oft eine Störung der Drehsymmetrie. So wird zum Beispiel die Strömung hinter einem Flugzeugpropeller durch den Tragflügel in 2 Teile zerschnitten

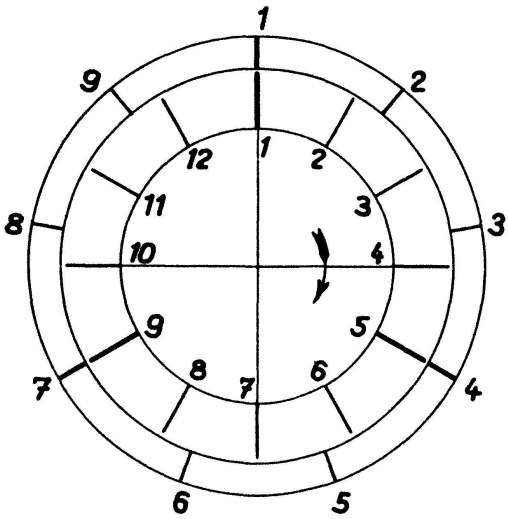
(Figur 1). Jedesmal wenn ein Propellerblatt am Flügel vorbeistreicht, erfährt es einen Stoss, der sich dann auf die Propellerwelle überträgt. Der Konstrukteur muss darnach trachten, diese Stösse möglichst schwach zu halten und ihre Frequenz ausserhalb jeder



Figur 1

Eigenfrequenz der Maschine (insbesondere der Torsionseigenfrequenzen der Propellerwelle) zu legen.

Dieses wichtige Problem der Technik ist nicht neu. Eine Darstellung findet sich im Buch *Technische Dynamik* von C. B. Biezeno und R. Grammel (Springer-Verlag, erste Auflage 1939), S. 649. Da es aber eines der seltenen Probleme der Technik ist, das mit ganz elementaren zahlentheoretischen Hilfsmitteln gelöst werden kann, mag eine Veröffentlichung auch in dieser Zeitschrift von Nutzen sein.



Figur 2

Figur 2 stellt eine Turbomaschine schematisch dar. Die inneren radialen Striche bedeuten die Laufschaufeln der Maschine, die äusseren Striche bedeuten ruhende Störquellen, zum Beispiel Leitschaufeln. Es seien im ganzen l Laufschaufeln und s Störquellen gleichmässig über den Umfang verteilt. In Figur 2 ist $l = 12$ und $s = 9$. In der gezeichneten Stellung des Laufrades steht die Laufschaufel Nr. 1 der Störquelle Nr. 1 gegenüber.

Ist (l, s) der grösste gemeinsame Teiler von l und s, so zerfällt der Kreis in (l, s) gleiche Sektoren, von denen jeder $l/(l, s)$ Laufschaufeln und $s/(l, s)$ Störquellen enthält. Dreht sich jetzt das Laufrad so weit, dass sich die Laufschaufel Nr. 1 vom Anfang des ersten Sektors bis zum Ende dieses Sektors bewegt, so erhält diese Laufschaufel $s/(l, s)$ Stösse. Überhaupt erhält jede der $l/(l, s)$ Laufschaufeln dieses Sektors $s/(l, s)$ Stösse; von diesen fallen keine zwei Stösse zeitlich zusammen, sondern folgen sich in regelmässigen Zeitabständen. Bei dieser Drehbewegung werden also insgesamt

$$\frac{l}{(l, s)} \cdot \frac{s}{(l, s)}$$

Impulse von den Störquellen dieses Sektors über die Laufschaufeln auf die Welle übertragen. Da es (l, s) Sektoren gibt, erfährt die Welle bei einer vollen Umdrehung

$$\frac{l}{(l, s)} \cdot \frac{s}{(l, s)} \cdot (l, s)$$

Stösse. Bezeichnet man diese Anzahl der Stösse, die die Welle bei einer Umdrehung erleidet, mit n, und ist $\{l, s\}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von l und s, so ist also

$$n = \{l, s\}.$$

Gibt man dem Störimpuls, den die Welle erfährt, wenn eine einzige Laufschaufel an einer Störquelle vorbeigleitet, die Grösse 1, so gilt für die gesamte Störintensität I der Welle

$$I = (l, s),$$

weil immer (l, s) Laufschaufeln gleichzeitig gestört werden. Will man diese Störintensität möglichst klein machen, so muss die Zahl der Laufschaufeln relativ prim zur Zahl der Störquellen sein.

W. Kissel, Zürich

Über die perspektive Abbildung von Kugeln

Wir betrachten zwei Kreise $c_1(C, s)$, $k_1(K, r)$ der Bildebene π als Distanzkreise zweier Perspektiven $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}$ (Figur 1). Unter bekannten Bedingungen[1]) ist der scheinbare Umriss c^c der Kugel γ über c_1 («Distanzkugel») vermöge $\mathfrak{K}$ eine Ellipse und der scheinbare Umriss k^c der Distanzkugel $\varkappa$ über k_1 vermöge $\mathfrak{C}$ eine Hyperbel. Die beiden Umrisskegelschnitte sind nach dem Dandelinschen Satz konfokal, wobei ihre gemeinsamen Brennpunkte F, G das innere bzw. äussere Ähnlichkeitszentrum von c_1 und k_1 darstellen[2]). Wir behaupten:

Die Nebenscheitel der Ellipse c^c fallen mit den reellen Vertretern der konjugiert imaginären Nebenscheitel der Hyperbel k^c zusammen.

In einem Seitenriss normal zu $z = (KC)$ durch C (Figur 1) erscheinen die erwähnten Kugeln als konzentrische Kreise γ''', $\varkappa'''$ und die parallel zu z legbaren Sehtangentialebenen an γ der Perspektive $\mathfrak{K}$ als Tangentenpaar τ_1''', τ_2''' mit den Spuren t_1''', t_2'''. Aus den ähnlichen, rechtwinkligen Dreiecken $C'''\overline{K}'''U'''$ und $t_1'''C'''U'''$ ($\overline{K}$ = Zentrum der Perspektive $\mathfrak{K}$, U = Berührpunkt von τ_1 mit γ) berechnen wir die bekanntlich der wahren Länge der halben Nebenachse b von c^c gleiche Strecke $t_1'''C'''$ zu $b = r\,s/\sqrt{r^2 - s^2}$. Üben wir bezüglich $\varkappa$ die Perspektive $\mathfrak{C}$ aus, so entspricht dies rechnerisch der Ver-

[1]) Vergleiche etwa Müller-Kruppa, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Springer, Wien 1948), S. 348.

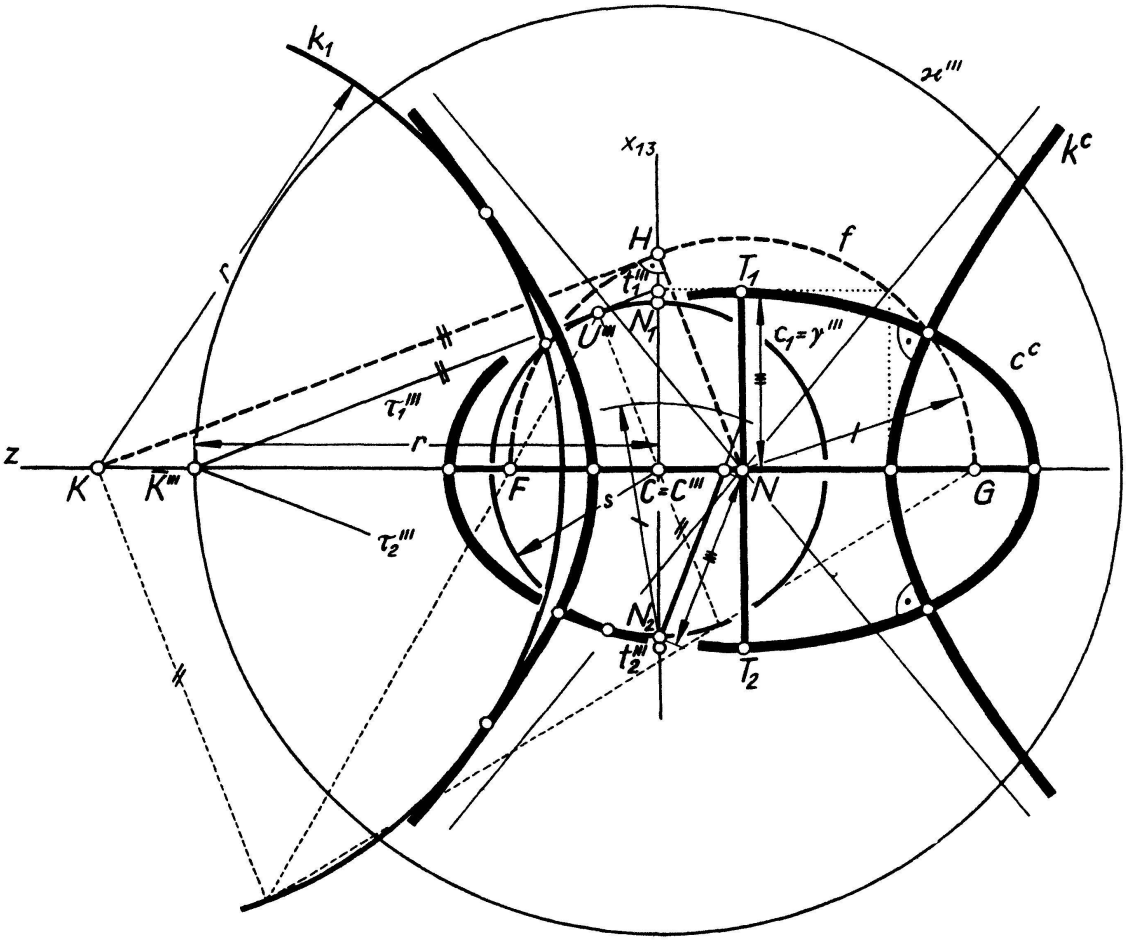
[2]) Man bemerkt, dass Scharen konfokaler Kegelschnitte als scheinbare Umrisse von Kugelpaaren angesehen werden können, wobei je zwei Kugeln eines Paares bezüglich der Brennpunkte F, G zentrisch ähnlich liegen. Die Mitten dieser Kugeln erfüllen eine Involution mit den Doppelpunkten F, G.

tauschung von r und s, wodurch für die imaginäre Halbachse $\bar{b}$ der Hyperbel k^c entsteht:

$$\bar{b} = \frac{r\,s}{\sqrt{s^2 - r^2}} = \frac{r\,s}{i\sqrt{r^2 - s^2}}.$$

Es gilt somit, wie behauptet, $\bar{b} = i\,b$. Wir folgern:

Jede Konstruktion, welche direkt Brennpunkte und Nebenachse des elliptischen scheinbaren Zentralumrisses einer Kugel liefert, gilt ebenso für die Ermittlung des hyperbolischen scheinbaren Kugelumrisses und umgekehrt[3]).



Figur 1

Scheinbare Zentralumrisse zweier Kugeln, von denen jede als «Distanzkugel» fungiert.

Wir wenden diesen Satz auf zwei solche Konstruktionen an[4]).

A) *Elliptisches Kugelbild.* Der scheinbare Umriss c^c der Kugel γ ist in der Perspektive $\mathfrak{K}$ mit dem Distanzkreis k_1 eine Ellipse (Figur 1).

1. Mittels des oben eingeführten Seitenrisses normal zu z konstruieren wir $t_1'''C''' = b$ die halbe Nebenachse von c^c. Der Halbstrahl $(K \| \tau_1''')$ trifft $(C \perp z)$ in einem Punkte H. $(H \perp \tau_1''')$ schneidet z in der Mitte N von c^c. Der Kreis $f = (N, NH)$ geht (als apollonischer Kreis) durch die Brennpunkte F, G von c^c auf z, da diese die Ähnlichkeitszentren von c_1 und k_1 sind. Hiermit liegt c^c fest.

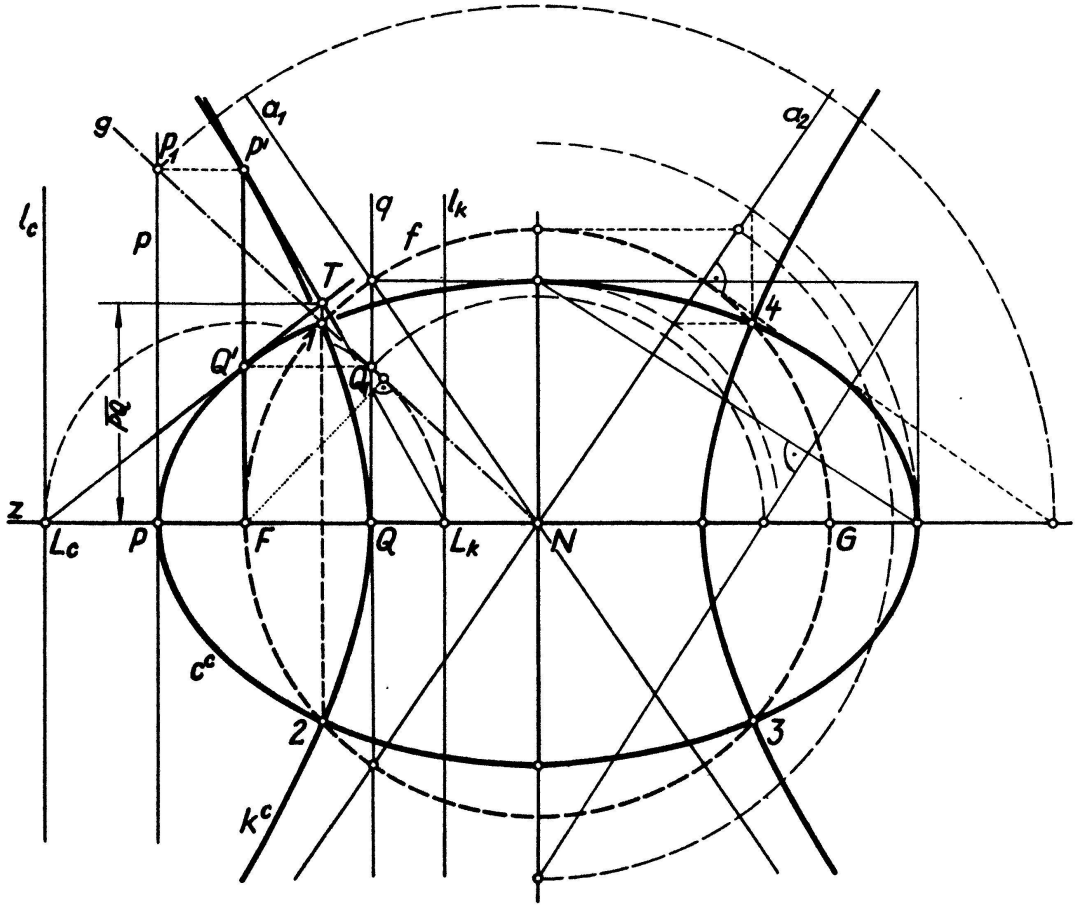
2. Eine räumliche Überlegung lehrt, dass der Zentralriss n^c jenes Grosskreises n von γ, dessen Ebene normal zu z steht, die Ellipse c^c aus Symmetriegründen in ihren Neben-

[3]) Im parabolischen Fall arten solche Konstruktionen im allgemeinen aus.

[4]) Die erstere stammt von E. Böck. Vergleiche dazu E. Böck, *Eine einfache Ermittlung des elliptischen Zentralumrisses der Kugel* (Wien 1953; der Technischen Hochschule Wien als Manuskript überreicht).

scheiteln T_1, T_2 berührt. Die Brennpunkte F, G von c^c, welche wir hier unter Benutzung der Endpunkte paralleler Durchmesser von c_1 und k_1 als deren Ähnlichkeitszentren finden, sind auch – je nachdem $N_1N \lessgtr FN$ – die Haupt- bzw. Nebenscheitel von n^c. Aus den Spurpunkten N_1 bzw. N_2 ($C \perp z$). c_1 von n, die auch n^c angehören, und der Achse FG von n^c ermitteln wir die andere Achse T_1T_2 durch die umgekehrte Papierstreifenkonstruktion. T_1T_2 stimmt mit der Nebenachse von c^c überein, wodurch c^c wieder vollständig festliegt. c^c berührt bekanntlich c_1 doppelt in den Schnittpunkten von c_1 mit der Polaren von K bezüglich c_1.

B) *Hyperbolisches Kugelbild.* Wir fassen nun umgekehrt γ als Distanzkugel einer Perspektive $\mathfrak{C}$ und $\varkappa$ als abzubildende Kugel auf. Der scheinbare Umriss k^c von $\varkappa$



Figur 2
Eigenschaften spezieller konfokaler Kegelschnitte.

ist dann eine Hyperbel, welche nach unseren einleitenden Überlegungen F und G ebenfalls als Brennpunkte und das durch das reelle Punktepaar T_1T_2 angezeigte konjugiert imaginäre Punktepaar als Nebenscheitel besitzt. Wir können nun *mit denselben Konstruktionslinien wie bei* A 1., 2. *die Hyperbel k^c festlegen*! k^c berührt bekanntlich k_1 doppelt in den Schnittpunkten von k_1 mit der Polaren von C bezüglich k_1.

Man sieht, dass nach A 1. die Brennpunkte des scheinbaren Kugelumrisses *immer aus ordentlichen Schnitten* hervorgehen und nach A 2. *das Auftragen der Distanz an keine starre Richtung gebunden ist.* Diese Vorteile bietet das allgemein übliche, auf DANDELIN zurückgehende Verfahren nicht. Zudem sind die dargelegten Methoden *kürzer* als dieses und mithin sowohl von praktisch konstruktivem als auch pädagogischem Interesse.

Die speziellen konfokalen Kegelschnittspaare c^c und k^c besitzen eine Reihe interessanter metrischer Eigenschaften, welche konstruktiv verwertbar sind (die durchaus elementaren Beweise wurden unterdrückt):

a) Die vier Schnittpunkte *1, 2, 3, 4* von c^c und k^c (Figur 2) liegen auf einem konzentrischen Kreis f, dessen Radius die lineare Exzentrizität der beiden Kegelschnitte ist[5]). f geht auch durch die Schnittpunkte von c_1 und k_1.

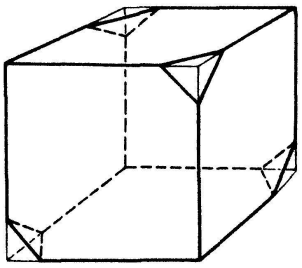
b) Die etwa zum Brennpunkt F gehörenden Leitgeraden l_c, l_k von c^c bzw. k^c schneiden auf der gemeinsamen Hauptachse dieser Kegelschnitte eine Strecke L_cL_k aus, deren Mitte F ist. L_c, L_k sind die Scheitelkrümmungsmitten der Fokalkurven von c^c bzw. k^c. Der Kreis über dieser Strecke wird von den Verbindungsgeraden der Schnittpunkte von c^c und k^c mit deren gemeinsamer Mitte N berührt.

c) Ist g eine solche Verbindungsgerade, so schneidet sie die Hauptscheiteltangenten p, q von c^c und k^c in Punkten P_1 bzw. Q_1, deren Entfernung von den Hauptscheiteln P, Q die Parameterstrecke von k^c bzw. c^c ist. Die Tangenten in den Endpunkten P' und Q' der Parametersehnen von k^c bzw. c^c gehen durch L_k bzw. L_c und schneiden sich auf der Geraden $(1\,2) = (1 \perp PQ)$ im Punkte T, dessen Normalabstand von $z = (PQ)$ gleich ist der Strecke PQ.

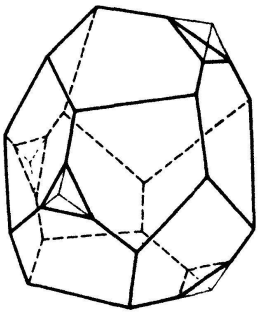
d) Die zu c^c und k^c konzentrischen Kreise durch P_1 bzw. Q_1 schneiden die Hauptachse in den Krümmungsmitten der Hauptscheitel von k^c bzw. c^c. Führt man eine analoge Überlegung für die zu k^c konjugierte Hyperbel durch, so erhält man die Nebenscheitelkrümmungsmitten von c^c. ERNST DOMKOWITSCH, Wien

Ungelöste Probleme

Nr. 17. Die vorliegende Frage soll lediglich auf anschauliche Art formuliert und erörtert werden: Die beiden in Figur 1 und 2 abgebildeten konvexen Polyeder sind, wie zeichnerisch angedeutet, aus einem Würfel und einem Dodekaeder dadurch hervorgegangen, dass je vier passende Ecken abgeschnitten wurden. Die beiden resultierenden Polyeder haben ersichtlich die Eigenschaft, nur Seitenflächen mit



Figur 1



Figur 2

einer durch drei teilbaren Eckenzahl aufzuweisen. Vermutlich gilt allgemein die folgende Aussage:

Ein beliebiges konvexes Polyeder lässt sich durch passendes Abschneiden von Ecken nach endlich vielen Schritten in ein Restpolyeder verwandeln, das lediglich Seitenflächen mit einer durch drei teilbaren Eckenzahl besitzt.

Da die beim Abschneiden einer Polyederecke neu entstehenden Eckpunkte dreikantig sind, kann man sich auf Dreikantspolyeder beschränken, da sich durch passende Schnitte stets zunächst ein solches erzeugen lässt. Die beim weiteren Schneideprozess neu hinzukommenden Seitenflächen sind dann stets dreieckig und genügen also der gestellten Forderung von selbst.

[5]) Man ermittelt *1, 2, 3, 4* direkt durch die Proclussche Ellipsenkonstruktion unter Benutzung der mit den Asymptoten a_1, a_2 von k^c zusammenfallenden Scheitelkreisdurchmesser von c^c.