

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1957)
Heft: 2

Artikel: Aufgaben
Autor: [s.n.]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19208>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

- [5] G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente Kurven II* (Teubner, Leipzig 1911), S. 195 ff.
 [6] W. WUNDERLICH, *Über die Schleppkurven des Kreises*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 156, 155–173 (1948).

Ungelöste Probleme

Nr. 16. Es sei K ein eigentlicher ebener Eibereich. Für einen inneren Punkt $P \in K$ bilde man das Integral des reziproken Stützabstandes

$$B(P) = \int \frac{ds}{p},$$

wobei ds das Längendifferential der Randkurve von K und p den Abstand der zugehörigen Stützgeraden von P bedeuten und die Integration über den gesamten Rand von K erstreckt werden soll. Es existiert dann die untere Grenze

$$B = \inf B(P) \quad [P \in K],$$

wo P alle inneren Punkte von K durchläuft.

In der von G. PÓLYA¹⁾ und seinen Mitarbeitern behandelten Theorie der physikalischen Eibereichsfunktionale spielt die Grösse

$$\Phi = A^2 B I^{-1},$$

wo A den Flächeninhalt und I das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment von K bezeichnen, eine wichtige Rolle als Vergleichsfunktional.

Nach einer durch zahlreiche Sonderuntersuchungen gestützten Vermutung von Herrn G. PÓLYA²⁾ gilt die Ungleichung

$$36 < \Phi \leq 54,$$

wo rechts Gleichheit für das reguläre Dreieck besteht, während die Schranke links durch sehr schmale gleichschenklige Dreiecke angenähert wird. Spezielle Zwischenwerte des interessanten Funktionals sind ferner:

$$\Phi = 4\pi^2 \quad [K = \text{Ellipse}]; \quad \Phi = 48 \quad [K = \text{Parallelogramm}].$$

Von verschiedenen Seiten wurde bisher vergeblich versucht, die obenstehende Ungleichung zu beweisen. H. HADWIGER

Aufgaben

Aufgabe 258. Von einer rationalen, bizirkularen Quartik q mit dem Doppelpunkt D kennt man eine der beiden (als reell vorausgesetzten) Doppelpunkttangenten sowie die beiden restlichen aus D an q legbaren Tangenten t_1, t_2 samt ihren Berührungspunkten T_1, T_2 . Man konstruiere die Quartik, wenn t_1, t_2 ebenfalls reell sind.

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien

¹⁾ Vergleiche G. PÓLYA und G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press 1951).

²⁾ Brief von G. PÓLYA an den Unterzeichneten vom 3. Juli 1956.

Lösung der Aufgabensteller: Jede rationale, bizirkuläre Quartik q ist Fusspunktskurve eines Mittelpunktskegelschnittes k [siehe zum Beispiel H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (1908), S. 5]. Legt man den Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems in den Doppelpunkt D und hat k die Halbachsen a, b und die Mittelpunktskoordinaten $(-\alpha, -\beta)$, so lautet die Gleichung seiner Fusspunktsquartik q bezüglich des Poles D (wenn x_0 die homogenisierende Koordinate bedeutet)

$$\left. \begin{aligned} f \equiv (x_1^2 + x_2^2)^2 + 2(\alpha x_0 x_1 + \beta x_0 x_2)(x_1^2 + x_2^2) \\ + (\alpha^2 - a^2)x_0^2 x_1^2 + 2\alpha\beta x_0^2 x_1 x_2 + (\beta^2 - b^2)x_0^2 x_2^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die erste Polare q_1 von q bezüglich D

$$f_1 \equiv (\alpha x_1 + \beta x_2)(x_1^2 + x_2^2) + (\alpha^2 - a^2)x_0 x_1^2 + 2\alpha\beta x_0 x_1 x_2 + (\beta^2 - b^2)x_0 x_2^2 = 0 \quad (2)$$

schneidet q in den absoluten Punkten I, J (je zweifach zu zählen), in dem endlichen Doppelpunkt D (sechsfach zu zählen, da q, q_1 in D gleiche Doppelpunktstangenten besitzen) und in den beiden Punkten T_1, T_2 , den Berührungspunkten der aus D an q legbaren Tangenten t_1, t_2 .

Aus $f - f_1 = 0$ erkennt man, dass die gesuchten Punkte T_1, T_2 auch auf dem Kreis m

$$x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_0 x_1 + \beta x_0 x_2 = 0 \quad (3)$$

liegen. Dieser Kreis m ist übrigens die Sehnenmittenkurve von q bezüglich D . Aus (2) und (3) ergeben sich die Richtungen der gesuchten Tangenten t_1, t_2 zu

$$a x_1 \pm b x_2 i = 0. \quad (4)$$

Sind t_1, t_2 reell, so ist q die Fusspunktskurve einer Hyperbel k , deren Asymptoten zu t_1, t_2 normal stehen.

Konstruktionsvorgang: Zeichnet man durch T_1 die Normale zu t_1 , durch T_2 die Normale zu t_2 , so erhält man die Asymptoten der Hyperbel k . Das Lot auf die gegebene Doppelpunktstangente in D liefert eine weitere Tangente von k , wodurch k und damit q als ihre Fusspunktskurve bezüglich D leicht konstruierbar ist.

Einen anderen, allerdings konstruktiv etwas schwerfälligeren Weg liefert die Inversion an einem Kreis mit der Mitte D . Durch diese quadratische Transformation geht die gegebene Quartik q , die die drei Hauptpunkte der Inversion zu Doppelpunkten besitzt, in einen Kegelschnitt e über, von dem man (nach Verwertung der gegebenen Stücke von q) zwei Linienelemente und einen Fernpunkt kennt.

Lösungen mittels einer Kreisverwandtschaft sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 259. Soit π un plan quelconque. O et P deux points de l'espace, a_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) les projections de \overline{OP} sur les côtés d'un polygone régulier situé dans π . Alors l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_1^n a_k^2,$$

c'est-à-dire le moyen des carrés des projections de \overline{OP} sur les côtés du polygone a la même valeur pour tous les polygones réguliers du plan. H. BREMEKAMP, Delft

Lösung: Da die Länge der Normalprojektion der Strecke \overline{OP} auf eine Gerade nur von der Richtung dieser Geraden abhängt, legen wir durch die Normalprojektion O' von O auf die Ebene π die n Geraden g_1, g_2, \dots, g_n so, dass $\angle g_j g_{j+1} = 2\pi/n$ ist. Ist P' die Normalprojektion von P auf π , dann liegt die Normalprojektion von P auf g_j auf dem Kreis mit dem Durchmesser $d = \overline{O'P'}$, und es ist $a_j = d \cos(\varphi_0 + 2j\pi/n)$.

Mittels der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^n \cos(\alpha + k\beta) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{n+1}{2}\beta\right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

erhält man

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^2 = \frac{d^2}{2n} \sum_{j=1}^n \left\{ 1 + \cos\left(2\varphi_0 + \frac{4j\pi}{n}\right) \right\} = \frac{d^2}{2}.$$

Lösungen dieser Art sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), J. SCHOPP (Budapest), R. WHITEHEAD (Camborne, Cornwall, England), G. N. VLAHAVAS (London).

Aufgabe 260. Wählt man auf jeder Seite eines Dreiecks einen Punkt, so bestimmen diese drei Punkte ein eingeschriebenes Dreieck und drei Randdreiecke. Man weise nach, dass die Fläche des eingeschriebenen Dreiecks mindestens so gross ist wie die des kleinsten Randdreiecks.

Gilt eine entsprechende Aussage für die Umfänge der Dreiecke? H. DEBRUNNER, Bern

Lösung: Da die Behauptung affin invariant ist, kann man das in Dreieck ABC eingeschriebene Dreieck MNP (M auf BC , N auf CA , P auf AB) gleichseitig annehmen. Die Bezeichnungen können weiter so gewählt werden, dass $\sphericalangle A \geq \sphericalangle B \geq \sphericalangle C$. Dann ist $\sphericalangle A \geq 60^\circ = \sphericalangle PMN$. Der Kreisbogen PMN ist dann mindestens gleich «hoch» über NP wie der Kreisbogen PAN . [Die «Höhe» des Fasskreisbogens zum Winkel α über der Sehne a beträgt $(a/2) \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.] Da M der höchste Punkt des erstgenannten Bogens ist, ist Dreieck $MNP \geq$ Dreieck PAN . A. BAGER, Hjørring (Dänemark)

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Graz.

Die Frage, ob eine entsprechende Aussage für die Umfänge der Dreiecke gilt, bleibt offen.

Aufgabe 261. Prove that the first n terms in the binomial expansion of $(2-1)^{-n}$ sum to $1/2$. LEO MOSER, Edmonton (Kanada)

Solution: Since

$$(2-1)^{-n} = 2^{-n} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r}$$

the sum of the first n terms is equal to

$$s_n = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r}.$$

Then

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sum_1^n \binom{n+r-1}{r-1} 2^{-n-r-1} + \sum_0^n \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r-1} \\ &= \sum_0^{n-1} \binom{n+r}{r} 2^{-n-r-2} + \sum_0^n \binom{n+r-1}{r} 2^{-n-r-1} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} - 2^{-2n-2} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2} s_n + 2^{-2n-1} \binom{2n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{2} s_n + 2^{-2n-1} \left\{ \binom{2n-1}{n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \right\} \\ &= \frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{2} s_n, \end{aligned}$$

so that $s_{n+1} = s_n$. Since $s_1 = 1/2$ it follows that

$$s_n = \frac{1}{2} \quad (n \geq 1).$$

L. CARLITZ, Durham (USA)

Dieselbe Lösung sandten A. BAGER (Hjørring), R. LAUFFER (Graz) und J. SCHOPP (Budapest). Beweise mittels vollständiger Induktion gaben R. KLÖTZLER (Leipzig) und H. WAGNER (Karlsruhe).

Aufgabe 262. Démontrer que l'intégrale double

$$\frac{h^2}{\pi} \iint e^{-h^2(x^2+y^2)} dx dy$$

étendu au domaine entre les droites $y + pn = a^{-1}(x + pn)$ et $y + pn = a(x + pn)$ est égale à l'intégrale simple

$$\frac{h_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-b}^{+b} e^{-h_1^2 \xi^2} d\xi \quad \left(h_1 = h pn, \quad b = \frac{a-1}{\sqrt{a^2+1}} \right).$$

H. BREMEKAMP, Delft

Solution de l'auteur: Soit $(y + pn)/(x + pn) = u$. On a $y = u(x + pn) - pn$,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (u^2 + 1)x^2 + 2pnx(u^2 - u) + p^2n^2(u-1)^2 \\ &= (u^2 + 1) \left\{ x^2 + 2pnx \frac{u(u-1)}{u^2+1} + p^2n^2 \frac{u^2(u-1)^2}{(u^2+1)^2} \right\} + p^2n^2 \frac{(u-1)^2}{u^2+1} \\ &= (u^2 + 1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2, \quad v = x + \frac{u(u-1)}{u^2+1} pn. \end{aligned}$$

Introduisons u et v comme variables d'intégration. On trouve

$$x = v - \frac{u(u-1)}{u^2+1} pn, \quad y = uv + \frac{u-1}{u^2+1} pn,$$

et le déterminant de JACOBI

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{u^2+2u-1}{(u^2+1)^2} pn & 1 \\ v - \frac{u^2-2u-1}{(u^2+1)^2} pn & u \end{vmatrix} = -\left(v + \frac{u+1}{u^2+1} pn\right);$$

u parcourt l'intervalle de $1/a$ à a , v de $-\infty$ à $+\infty$. L'intégrale double, qui est évidemment positif, devient

$$\frac{h^2}{\pi} \int_{1/a}^a du \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-h^2 \left\{ (u^2+1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2 \right\} \right] \left(v + \frac{u+1}{u^2+1} pn \right) dv.$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-h^2 \left\{ (u^2+1)v^2 + \frac{(u-1)^2}{u^2+1} p^2n^2 \right\} \right] v dv = 0.$$

¹⁾ $\exp[\alpha] = e^\alpha$.

Nous avons encore à déterminer

$$\begin{aligned} & \frac{h^2 p n}{\pi} \int_{1/a}^a \frac{u+1}{u^2+1} \exp \left[-\frac{(u-1)^2}{u^2+1} h^2 p^2 n^2 \right] du \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-h^2 (u^2+1) v^2] dv \\ &= \frac{h p n}{\sqrt{\pi}} \int_{1/a}^a \frac{u+1}{(u^2+1)^{3/2}} \exp \left[-\frac{(u-1)^2}{u^2+1} h^2 p^2 n^2 \right] du, \end{aligned}$$

parce que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-h^2 (u^2+1) v^2] dv = \frac{\sqrt{\pi}}{h (u^2+1)^{1/2}}.$$

Choisissant maintenant comme variable d'intégration

$$\xi = \frac{u-1}{(u^2+1)^{1/2}}$$

nous obtenons le résultat désiré. – Le problème est visiblement issu d'une question de probabilité.

Aufgabe 263. Zwei Seiten eines konvexen Dreikants werden von einer Geraden g geschnitten. Man bestimme die zu g parallele Ebene so, dass der Schwerpunkt des entstehenden Tetraeders auf g liegt.
J. SCHOPP, Budapest

Lösung: O sei die Ecke des Trieders, die übrigen Ecken des Tetraeders seien der Reihe nach A, B, C , so dass die gegebene Gerade g die Seitenfläche OBC durchschneide. S sei der Schwerpunkt des Tetraeders, der Schwerpunkt der O gegenüberliegenden Seitenfläche sei S' (Figur 1).

Der Ort des Punktes S ist die gegebene Gerade g . Wegen $OS:OS' = 3:4$ ergibt sich als Ort für S' eine der Geraden g parallele Gerade g' . Da die Ebene ABC parallel zu g ist, enthält sie die Gerade g' .

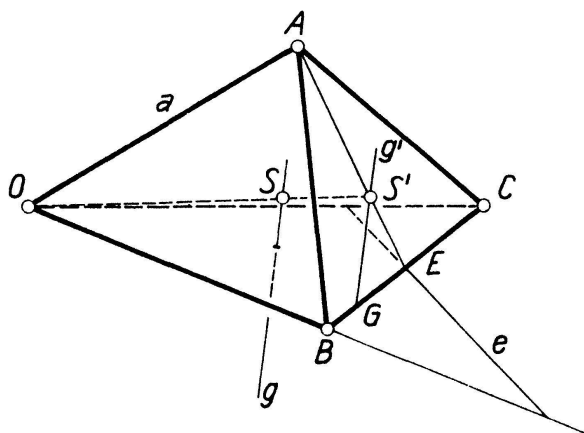
Die auf der Seitenfläche ABC gelegene Schwerlinie s_a liegt auf der Geraden AS' . Für ihren Schnittpunkt E mit der Kante BC gilt offenbar $S'E:AS' = 1:2$. Da der geometrische Ort des Punktes A bzw. S' die Gerade a bzw. g' ist, erhält man als Ort des Punktes E die zu a und g' parallele Ebene ε , wo auf jeder gemeinsamen Transversalen von a und g' die obige Proportion der Entfernungen für den Schnittpunkt mit der Ebene und die beiden Fusspunkte gilt.

Da E in der Ebene OBC liegt, erhalten wir als geometrischen Ort die Gerade e , als Schnittlinie der Ebenen ε und OBC .

Mit Vollzug dieser Konstruktionen haben wir die Aufgabe auf eine in der Ebene OBC zu vollziehende ebene Aufgabe reduziert:

Zwischen den Geraden OB und OC ist eine Strecke BC einzuschieben, die durch den Schnittpunkt G der Geraden g' mit der Ebene OBC geht und von der Geraden e halbiert wird.

Ähnlichkeitsbetrachtungen ergeben die Lösung der Aufgabe: Wir gehen von irgend-einer Strecke $B'C'$ (Figur 2) aus und halbieren sie. Der Halbierungspunkt sei E' . Der Winkel der Geraden OB und e ist gegeben, die Ortskurve ihres Schnittpunktes K' ist daher ein Kreisbogen. Dies gilt in ähnlicher Weise für den Schnittpunkt L' der Geraden



Figur 1

294. Prove the proposition: If a side of a triangle is less than the average (arithmetic mean) of the two other sides, the opposite angle is less than the average of the two other angles.
G. PÓLYA, Palo Alto (California, USA)

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x -Achse nach rechts, y -Achse nach vorn, z -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. $\sqrt[3]{1,7649} = \sqrt[3]{5}$. [$x = 1,7649$.]
2. Die dreireihige Determinante aus neun aufeinanderfolgenden Quadratzahlen

$$\begin{vmatrix} u^2 & (u+1)^2 & (u+2)^2 \\ \dots\dots\dots & & \\ \dots\dots\dots & & (u+8)^2 \end{vmatrix}$$

hat den festen Wert -6^3 .

3. X, Y, Z, W sind die Seitenmitten eines beliebigen konvexen Vierecks, P ist ein Punkt in seinem Innern. Durch die Schnitte PX, PY, PZ, PW wird das Viereck in vier Teile zerlegt, aus denen stets ein anderes Viereck zusammengesetzt werden kann.
4. In der Ebene des Dreiecks ABC bewegt sich ein Punkt P . Die Schwerpunkte der Dreiecke PAB, PBC, PCA sind die Ecken eines Dreiecks fester Form und Grösse.
5. Zum sicheren Zeichnen einer Ellipse, von der die Hauptachsen A_1A_2 und B_1B_2 gegeben sind, bedient man sich mit Vorteil der Krümmungskreise in den Scheitelpunkten. Man hat dazu das Lot aus einer Ecke des Tangentenrechtecks auf die Strecke B_1A_1 zu fällen. Der Fusspunkt dieses Lotes auf B_1A_1 sei F . Der Punkt mit der Abszisse B_1F und der Ordinate A_1F ist ein günstig zwischen den beiden Krümmungskreisen gelegener Punkt der Ellipse, seine Tangente fällt unter 45° !
[Aus: HOHENBERG, *Konstruktive Geometrie* (Wien 1956).]

Literaturüberschau

H. RICHTER:

Wahrscheinlichkeitstheorie

435 Seiten mit 14 Figuren. Springer-Verlag, Berlin 1956

Die unglaubliche Wandlung, welche die Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten Jahrzehnten erfahren hat, könnte nicht eindrücklicher vor Augen geführt werden, als wenn man das neue Buch von RICHTER mit einem früheren Standardwerk, etwa mit der 1902 in erster Auflage erschienenen *Wahrscheinlichkeitsrechnung* von E. CZUBER, vergleicht. RICHTER setzt sich keineswegs zum Ziel, einen möglichst umfassenden Überblick darüber zu geben, was heute auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie erreicht ist. Er will vielmehr ein der modernen Auffassung entsprechendes Lehrbuch geben, das den Leser in die Lage versetzt, schwierigere moderne Untersuchungen zu studieren und zu verstehen. Dies ist ihm denn auch vortrefflich gelungen, wie kaum anders zu erwarten; war er es doch, der in einer Aufsatzreihe in den «Mathematischen Annalen» 1952–54 eine kritische Auseinandersetzung mit den bestehenden Begründungen der Wahrscheinlichkeitstheorie und einen Neuaufbau derselben geliefert hat. Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie soll ein abstraktes Modell aufbauen,