ist ganz leicht. Man braucht nur auf beiden Seiten von (27) den ln zu bilden und $x/n = h$ zu setzen; dann reduziert sich die Behauptung auf

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}\, x = x\,. \tag{28}$$

Nun ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$$

einfach die Ableitung des Logarithmus bei Eins, also Eins. Damit ist (28) und daher auch (27) bewiesen. Als Spezialfall von (27) für $x = 1$ folgt die bekannte Formel

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{29}$$

die manchmal als Definition von e benutzt wird.

Aber das sind Zusätze, die man auch dem Hochschulunterricht überlassen kann. Die Hauptsache ist die Definition des Logarithmus vom Flächeninhalt aus. Gerne möchte ich das Urteil der Lehrer darüber vernehmen, ob diese Definition für die Schule brauchbar erscheint. B. L. VAN DER WAERDEN

Nachtrag. In dem Buche von W. BREIDENBACH, *Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht*, 3. Auflage (Verlag Brandstetter, Leipzig 1944), sind die Logarithmen genau so eingeführt wie hier.

Kleine Mitteilungen

Vom Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ [1]

Die übliche Art, die Differentiation der trigonometrischen Funktionen herzuleiten, ist folgende:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right\} \tag{1}$$

oder auch

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right\}. \tag{2}$$

In beiden Fällen braucht man unter anderem den Grenzwert $\lim_{x\to 0} (\sin x/x)$. Man leitet ihn nach uralter Gepflogenheit aus den Ungleichungen $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ für $0 < x < \pi/2$ her. Das geht einwandfrei, wenn man die Integralrechnung schon bis zur Definition und Berechnung der Bogenlänge entwickelt hat. Gewöhnlich aber verwendet man einen anschaulichen Bogenbegriff und entnimmt die Ungleichungen der Anschauung, indem man den Leser oder Hörer damit tröstet, dass mit der Integralrechnung alles in Ordnung kommen wird. Mitunter beruft man sich auch auf die von ARCHIMEDES gelehrte Kreisrektifikation, wogegen folgendes einzuwenden ist: Der Hörer kennt aus der Elementargeometrie die Winkelmessung, etwa in Graden. Führt man das Bogenmass des Winkels ein, dann ist man eigentlich verpflichtet, dem Hörer zu zeigen, dass es dem ihm geläufigen Mass proportional ist. Das geht am einfachsten, indem man die Gültigkeit der Cauchyschen Funktionalgleichung $b(x+y) = b(x) + b(y)$ beweist, wo $b(x)$ das Bogen-

[1] Vortrag auf dem Vierten österreichischen Mathematikerkongress in Wien im September 1956.

mass des Winkels x bedeutet. Diese Gleichung lässt sich mit dem Archimedischen Verfahren der wiederholten Zweiteilung nur in Sonderfällen einsehen. Wenn x und y inkommensurabel sind, braucht man dazu allgemeinere Einteilungen, das heisst im wesentlichen den Riemannschen Integralbegriff.

In radikaler Weise vermeidet man diese Schwierigkeiten, wenn man die trigonometrischen Funktionen mit Hilfe des $\int\limits_0^x dt/(1+t^2)$ einführt[2]). Ihre Differentiation ergibt sich dann als Umkehrung der Integration, der $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)$ als Ableitung des Sinus bei $x=0$. Abgesehen davon, dass man dabei die Winkelfunktionen erst verhältnismässig spät verwenden kann, hat dieses Vorgehen den Nachteil, von der historischen Entwicklung sehr stark abzuweichen.

Ich will deshalb hier einen Weg zeigen, auf dem man das Bogenmass des Winkels und die Differentiation der trigonometrischen Funktionen ohne den Begriff der Bogenlänge entwickeln kann.

Wir setzen irgendeine Winkelmessung, zum Beispiel in Graden, und elementargeometrische Bekanntschaft mit den trigonometrischen Funktionen voraus. Aus dem Additionstheorem des Cosinus liest man unmittelbar ab, dass dieser im ersten Quadranten monoton abnimmt, der Sinus daher hier monoton zunimmt. Elementargeometrisch ist ferner klar[3]), dass beide Funktionen in diesem Gebiet eindeutig umkehrbar sind, aus welchen Eigenschaften die Stetigkeit unmittelbar folgt.

Wir zeigen nun, dass $(d/dx)\sin x$ bei beliebiger Winkeleinheit für $0<x<R$, wo R die Maßzahl des rechten Winkels ist, existiert und dem $\cos x$ proportional ist. Dazu bestimmen wir $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)$, wo x die Masszahl des Winkels in irgendeinem fest gewählten Winkelmass bedeutet, ohne Verwendung eines Bogens.

Durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

gewinnen wir die Gleichung

$$\sin x = p_n(x)\, q_n(x), \tag{3}$$

wo

$$p_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}, \qquad q_n(x) = 2^n\sin\frac{x}{2^n}$$

ist. Setzen wir noch

$$r_n(x) = p_n(x)\cos\frac{x}{2^n},$$

dann gilt, wie leicht zu sehen,

$$\left.\begin{aligned} p_n(x) &> p_{n+1}(x),\\ r_n(x) &< r_{n+1}(x),\\ r_n(x) &< p_n(x), \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 0<x<R.$$

Daher existiert $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = p(x)$ und es ist, immer in diesem Bereich,

$$1 > p(x) > r_1(x) = \cos^2\frac{x}{2} > 0. \tag{4}$$

Daher existiert auch

$$\lim_{n\to\infty} q_n(x) = q(x) > 0,$$

und es ist

$$\sin x = p(x)\, q(x). \tag{5}$$

---

[2]) Siehe VIETORIS-LOCHS, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung* (Universitätsverlag Wagner, Innsbruck 1951), S. 124–144.

[3]) Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel.

Ferner gilt

$$q(x+y) = q(x) + q(y) \quad \text{für} \quad 0 < x < x+y < R.$$

Denn

$$q(x+y) = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x+y}{2^n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{y}{2^n} + 2^n \sin\frac{y}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\right\}$$
$$= q(x) + q(y)$$

wegen der Stetigkeit des $\cos x$ bei $x = 0$. Weil alle $q_n(x)$ in unserem Bereich monoton wachsen, nimmt dort $q(x)$ nirgends ab. Daher hat $q(x)$ als Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung die Form $q(x) = c\,x$, wo c eine Konstante >0 ist. (5) nimmt damit die Form $\sin x = c\,x\,p(x)$ an, das heisst, es ist $\sin x/x = c\,p(x)$. Wegen (4) ist $\lim_{x\to 0+} p(x) = 1$, also

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{x} = c.$$

Damit ist nach (1) oder (2)

$$\frac{d}{dx}\sin x = c\cos x.$$

Setzen wir $x = y/c$ und $\sin y/c = \mathrm{s}(y)$, $\cos y/c = \mathrm{c}(y)$, dann wird

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{s}(y) = \mathrm{c}(y) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dy}\,\mathrm{c}(y) = -\mathrm{s}(y).$$

y ist das Bogenmass des Winkels. Weil dieser Name aber erst in der Integralrechnung erklärt wird, nennen wir es hier lieber das natürliche Winkelmass[4]).

c kann man aus der Gleichung

$$c\,x = \lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x}{2^n}\right\} \tag{6}$$

für ein beliebig gewähltes x berechnen. Ist $3\,x_0$ die Maßzahl des gestreckten Winkels, dann ist

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2^n \sin\frac{x_0}{2^n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\{2^n a_n\}, \quad \text{wo} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$$

ist. Dieser wohl schon ARCHIMEDES bekannte Grenzwert ist $\pi/3$. Er kann als Definition von π genommen werden. Nach (6) ist also $c = \pi/3\,x_0$. Wird x im Gradmass gemessen, dann ist $x_0 = 60$ und $c = \pi/180$. π erscheint bei dieser Auffassung als Masszahl des gestreckten Winkels im natürlichen Winkelmass. L. VIETORIS, Innsbruck.

Ungelöste Probleme

Nr. 15. Nach dem bekannten Hellyschen Satz haben alle Eibereiche einer Menge ebener Eibereiche einen nichtleeren Durchschnitt, falls dies bereits für je drei Eibereiche der Menge zutrifft. – Wir fragen hier, ob sich eine modifizierte Aussage noch machen lässt, wenn man mit wesentlicher Abschwächung der genannten Voraussetzung des Hellyschen Satzes nur verlangt, dass sich unter je vier beliebig aus der Menge ausgewählten Eibereichen stets wenigstens drei finden lassen, die einen nichtleeren Durchschnitt aufweisen. – Das mit Figur 1 veranschaulichte einfache

[4]) Wir mussten hier für den Augenblick die Winkelfunktionen des im natürlichen Winkelmass gemessenen Winkels anders bezeichnen als für das ursprünglich verwendete Winkelmass.