Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1956)

Heft: 5

Artikel: Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

Autor: Steiger, Franz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18627

Interessant sind diese Beobachtungen für uns deswegen, weil die Beweisführung unseres Satzes (IX 20) bei EUKLID eindeutig transfinit ist. Es wird aus der Tatsache, dass die als Beispiel geprüfte Menge der Primzahlen *nicht* vollständig ist, auf die Existenz unendlich vieler Primzahlen geschlossen. Kein Zweifel, diese Schlussweise ist intuitionistisch unzulässig! – O. BECKER wollte also mit der Bemerkung, dass der Satz IX 20 in der ganzen antiken Arithmetik isoliert dastünde, wohl eben diese Tatsache unterstreichen. – Aber ist denn dieser Satz in der antiken Wissenschaft wirklich so vollkommen isoliert? – Nehmen wir jenen einzigen Ausnahmefall der aristotelischen Ersten Analytik, in dem ein Verstoss gegen die intuitionistische Denkweise zu beobachten ist. Es handelt sich hier[16]) um den Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite, als Beispiel einer *Deductio ad absurdum*. BECKER schreibt darüber folgendes:

«Auch in diesem Fall liegt eine eigentliche transfinite Schlussweise nicht vor. Allerdings ist die Disjunktion zwischen messbaren und unmessbaren Strecken nicht endlich entscheidbar, im Gegensatz etwa zu der zwischen geraden und ungeraden Zahlen. *Insofern besteht hier schon ein Ausnahmefall, merkwürdigerweise auch sonst bei diesem mathematischen Problem, denn in der Deductio ad absurdum der Messbarkeit der Diagonale werden leere Begriffe verwandt; die Klasse der messbaren Diagonale ist ja die Nullklasse.*»

Man muss dazu nur bemerken, dass der Satz von der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur Seite ebenso pythagoreischen Ursprungs ist[17]), wie nach unserer Vermutung auch der Satz *Euclid* IX 20.

Die bisher bekannten beiden auffallendsten Verstösse der antiken Mathematik gegen den Intuitionismus stammen also von den Pythagoreern. Man wäre also geneigt anzunehmen, dass die transfinite Schlussweise in der ältesten Periode der griechischen Mathematik bei den Pythagoreern des 5. Jahrhunderts noch *nicht* verpönt war, sie wurde erst im 4. Jahrhundert von EUDOXOS ab vermieden. Die Logik des 5. Jahrhunderts wäre also noch nicht dieselbe wie später diejenige des ARISTOTELES.

ÁRPÁD SZABÓ, Budapest.

Über die Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$

Von einer «*Grundlösung*» unserer Gleichung sprechen wir, wenn a, b, c, d natürliche Zahlen mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler 1 sind. Lösungen, die sich nur durch Permutation von a, b, c unterscheiden, gelten als *dieselbe* Lösung.

Man erhält *jede Grundlösung* der pythagoreischen Gleichung (G) $a^2+b^2+c^2=d^2$, und zwar jede *genau einmal*, wenn man in den nachfolgenden Formeln (A), (B), (C) und (D) für die Parameter s, t, u und v alle ganzen Zahlen einsetzt, die mit den

---

[16]) *Analytica priora* I 31 (46 b, 28 35).

[17]) Vgl. O. BECKER, Quell. Gesch. Math. [B.] *3*, 544ff. (1936).

beigefügten Bedingungen (I), (II), ..., (VII) verträglich sind:

$$\underline{a=2(sv+tu)}, \tag{A}$$

$$\underline{b=2(su-tv)}, \tag{B}$$

$$\underline{c=(s^2+t^2)-(u^2+v^2)}, \tag{C}$$

$$\underline{d=(s^2+t^2)+(u^2+v^2)}, \tag{D}$$

$$s\geqq 1;\quad t\geqq 0;\quad u\geqq 1;\quad v\geqq 0;\quad t+v\geqq 1, \tag{I}$$

$$s+t+u+v\equiv 1 \pmod 2, \tag{II}$$

$$s^2+t^2>u^2+v^2, \tag{III}$$

$$su>tv, \tag{IV}$$

$$(s^2+t^2,\quad u^2+v^2,\quad sv+tu)=1 \tag{V}$$

(das heisst, der grösste gemeinschaftliche Teiler der drei in der Klammer stehenden Zahlen soll 1 sein).

$$\text{Mit } t=0 \text{ gelte } v\leqq u. \tag{VI}$$

$$\text{Mit } v=0 \text{ gelte } t\leqq s. \tag{VII}$$

(V) ist nur dann erfüllt, wenn $(s, t, u, v)=1$. Dass diese letzte Bedingung nicht hinreicht, wenn wir *Grund*lösungen erhalten wollen, zeigt das Beispiel $\{s;\ t;\ u;\ v\}=\{3;\ 1;\ 2;\ 1\}$, das auf $\{a;\ b;\ c;\ d\}=\{10;\ 10;\ 5;\ 15\}$ führen würde.

Unser Formelsystem geht, wenn wir *gleichzeitig* $t=0$ und $v=0$ setzen, genau in dasjenige über, das man für die Ermittlung der teilerfremden pythagoreischen Zahlen*tripel* braucht[1]).

Bei der Herstellung einer Tafel der Grundlösungen von (G) liessen wir

$$k=s+t+u+v,$$

von $k=3$ an aufsteigend, alle ungeraden Zahlen durchlaufen [siehe (I) und (II)!]. Jede mit den Bedingungen verträgliche Darstellung eines Wertes k durch vier Summanden, wobei auch deren Permutationen zu berücksichtigen waren, lieferte eine Lösung. Die doppelte Ungleichung

$$\sqrt{d}<k<2\sqrt{d} \tag{VIII}$$

ermöglichte es, eine nach aufsteigendem d geordnete, lückenlose *Tafel* zu berechnen. Ein *Beweis* der angegebenen Formeln wird demnächst in der Zeitschrift «Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht» (Dümmler, Bonn) erscheinen.

Für $d\leqq 99$ hat (G) folgende 347 *Grundlösungen:*

---

[1]) HELMUT HASSE, ***Proben mathematischer Forschung in allgemeinverständlicher Behandlung*** (Otto Salle Verlag, Frankfurt a. M. 1955).

Grundlösungen der Gleichung $a^2+b^2+c^2=d^2$

d	a	b	c
3	1	2	2
7	2	3	6
9	1	4	8
	4	4	7
11	2	6	9
	6	6	7
13	3	4	12
15	2	5	14
	2	10	11
17	1	12	12
	8	9	12
19	1	6	18
	6	6	17
	6	10	15
21	4	5	20
	4	8	19
	4	13	16
	8	11	16
23	3	6	22
	3	14	18
	6	13	18
25	9	12	20
	12	15	16
27	2	7	26
	2	10	25
	2	14	23
	7	14	22
	10	10	23
29	3	16	24
	11	12	24
	12	16	21
31	5	6	30
	6	14	27
	6	21	22
	14	18	21
33	1	8	32
	4	7	32
	4	17	28
	7	16	28
	8	8	31
	8	20	25
	17	20	20
35	1	18	30
	6	10	33
	6	17	30
	15	18	26
37	3	8	36
	3	24	28
	8	24	27
	12	21	28
39	2	19	34
	2	26	29
	10	14	35
	13	14	34
	14	22	29
	19	22	26
41	4	12	39
	4	24	33
41	9	24	32
	12	24	31
	23	24	24
43	2	9	42
	2	18	39
	6	7	42
	7	30	30
	9	18	38
	18	25	30
45	4	28	35
	5	8	44
	8	19	40
	13	16	40
	16	20	37
	20	28	29
47	2	21	42
	6	18	43
	6	27	38
	11	18	42
	18	21	38
	18	27	34
49	4	9	48
	4	33	36
	9	32	36
	12	24	41
	12	31	36
	15	24	40
	23	24	36
51	1	10	50
	1	22	46
	1	34	38
	2	14	49
	10	10	49
	14	14	47
	14	17	46
	14	31	38
	22	31	34
53	8	12	51
	8	21	48
	12	19	48
	12	27	44
	12	36	37
	27	28	36
55	3	10	54
	3	30	46
	6	35	42
	10	18	51
	18	26	45
	19	30	42
57	4	23	52
	4	32	47
	7	8	56
	7	40	40
	8	28	49
	16	17	52
	16	28	47
	17	32	44
	23	28	44
57	25	32	40
	28	28	41
59	6	9	58
	6	14	57
	6	23	54
	6	41	42
	9	22	54
	9	30	50
	14	39	42
	30	30	41
61	3	24	56
	11	36	48
	12	21	56
	20	36	45
	21	24	52
	24	29	48
	24	36	43
63	2	11	62
	2	22	59
	2	34	53
	2	43	46
	5	10	62
	5	38	50
	10	37	50
	11	22	58
	22	26	53
	22	37	46
	26	38	43
	34	37	38
65	7	24	60
	15	36	52
	20	24	57
	20	39	48
	25	36	48
67	6	22	63
	6	33	58
	14	18	63
	15	30	58
	15	42	50
	18	42	49
	22	33	54
	30	33	50
	31	42	42
69	4	11	68
	4	16	67
	4	32	61
	4	44	53
	5	40	56
	11	44	52
	16	28	61
	16	32	59
	16	37	56
	20	35	56
	28	29	56
	35	40	44
71	3	26	66
	3	46	54
	10	45	54

d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c
71	18	19	66	81	28	41	64	93	4	13	92
	18	46	51		32	49	56		4	52	77
	19	42	54		40	44	55		8	11	92
	26	42	51	83	2	18	81		8	29	88
	30	35	54		2	54	63		8	53	76
	30	45	46		15	42	70		8	64	67
73	1	12	72		18	18	79		11	28	88
	8	9	72		18	33	74		13	52	76
	8	36	63		18	47	66		20	32	85
	12	12	71		28	42	63		20	43	80
	12	33	64		30	33	70		28	44	77
	12	44	57		30	42	65		32	35	80
	24	28	63		33	38	66		32	43	76
	28	36	57		42	47	54		32	56	67
	33	44	48	85	4	45	72		43	52	64
75	7	10	74		5	12	84		52	53	56
	7	26	70		12	59	60	95	5	54	78
	10	14	73		21	40	72		6	42	85
	10	22	71		24	32	75		6	58	75
	10	41	62		24	45	68		14	27	90
	14	23	70		32	51	60		21	22	90
	22	46	55	87	2	13	86		21	50	78
	25	34	62		2	26	83		22	54	75
	34	38	55		2	29	82		27	30	86
	38	41	50		2	61	62		30	58	69
77	3	12	76		13	26	82		42	50	69
	3	36	68		13	50	70	97	7	12	96
	4	27	72		14	22	83		7	48	84
	5	48	60		14	38	77		12	39	88
	12	32	69		19	22	82		12	47	84
	12	36	67		19	58	62		12	52	81
	12	48	59		22	34	77		16	63	72
	13	24	72		22	58	61		24	33	88
	24	27	68		35	38	70		25	60	72
	27	40	60		35	50	62		33	56	72
	32	48	51	89	8	36	81		39	52	72
	40	45	48		9	28	84		47	60	60
79	6	11	78		15	36	80		48	56	63
	6	27	74		15	60	64	99	1	14	98
	6	38	69		17	24	84		1	70	70
	6	43	66		24	28	81		2	31	94
	11	42	66		24	48	71		2	49	86
	18	21	74		24	57	64		10	26	95
	18	34	69		36	36	73		10	65	74
	21	30	70		36	55	60		14	14	97
	21	38	66		39	48	64		14	47	86
	27	34	66	91	6	18	89		14	58	79
81	1	28	76		6	26	87		17	26	94
	1	44	68		6	39	82		17	46	86
	8	16	79		6	54	73		26	49	82
	8	49	64		9	10	90		26	65	70
	16	23	76		9	46	78		31	38	86
	16	41	68		9	62	66		31	46	82
	16	47	64		18	54	71		31	58	74
	17	56	56		26	57	66		38	46	79
	20	44	65		30	55	66		46	47	74
	20	55	56		39	54	62		49	50	70
	23	44	64		46	54	57	101	..	..	..

Franz Steiger, Bern