

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 11 (1956)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die Zahlen der Tabelle stellen die Näherungswerte des vollständigen elliptischen Integrals  $K(k)$  mit  $k = \sin \alpha/2$  dar.

In den oberen Halbzeilen stehen jeweils die errechneten Werte, in den unteren die prozentualen Abweichungen vom genauen Wert. H. WAGNER, Karlsruhe.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. 1 (Wiesbaden 1949), S. 83.
- [2] PUWEIN, *Die mutierte Pendellänge*, Öst. Ing.-Arch. 8, 54 (Wien 1954).
- [3] LOCHER-ERNST, *Differential- und Integralrechnung* (Basel 1948), S. 434.
- [4] PETERS, *Sechstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen* sin, cos, tg, ctg, sec, cosec (Bonn 1946).
- [5] BYRD-FRIEDMAN, *Handbook of Elliptic Integrals* (Berlin 1954).

### Ungelöste Probleme

**Nr. 12.** Herr H. LENZ (München) macht uns auf das folgende elementargeometrische Problem aufmerksam, dessen Lösung unseres Wissens noch nicht allgemein aufgefunden werden konnte: Wie gross kann der Flächeninhalt  $F$  eines ebenen konvexen  $n$ -Ecks vom Durchmesser  $D = 1$  höchstens sein?

K. REINHARDT<sup>1)</sup> hat unter anderem gezeigt, dass unter allen  $n$ -Ecken mit vorgeschriebenem Durchmesser das reguläre  $n$ -Eck sicher dann den grösstmöglichen Flächeninhalt aufweist, wenn  $n$  ungerade ist. Für gerade  $n > 4$  ist jedoch die Frage noch ungeklärt.

Für den Flächeninhalt  $F$  eines beliebigen  $n$ -Ecks vom Durchmesser  $D = 1$  gilt die Ungleichung

$$F \leq \frac{n}{2} \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \quad (n \geq 3),$$

wobei das Gleichheitszeichen dann gilt, wenn  $n$  ungerade und das  $n$ -Eck regulär ist. Hierfür hat H. LENZ kürzlich<sup>2)</sup> einen übersichtlichen Beweis veröffentlicht. Die angewandte Methode zur Ermittlung des in unserem Sinne extremalen Polygons scheitert für gerade  $n$  am Umstand, dass es keine gleichseitigen Reuleaux-Polygone mit gerader Seitenzahl gibt. H. HADWIGER.

### Aufgaben

**Aufgabe 237.** Es seien  $a_1 < a_2 < \dots$  die Zahlen mit höchstens zwei verschiedenen Primfaktoren. Dann ist zu zeigen, dass es eine Zahl  $c > 0$  gibt, so dass für unendlich viele  $k$

$$a_{k+1} - a_k > c \log k.$$

Lässt sich dieser Satz verschärfen? Kann man also zeigen, dass

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{\log k} = \infty?$$

P. ERDÖS, Jerusalem.

<sup>1)</sup> K. REINHARDT, *Extremale Polygone gegebenen Durchmessers*, Jber. dtsch. Math.-Ver. 31, 251–270 (1922).

<sup>2)</sup> H. LENZ, *Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser*, Jber. dtsch. Math.-Ver. 58, 87–97 (1956).

*Lösung* (nach Angaben des Aufgabenstellers):  $p_1 < p_2 < \dots$  sei die Folge der Primzahlen. Für eine beliebige natürliche Zahl  $r$  bezeichnen wir mit  $b_1 = 1 < b_2 < b_3 < \dots < b_s$  diejenigen Zahlen  $\leq p_r$ , die die Form  $p^\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) oder  $p^\alpha q^\beta$  ( $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \alpha + \beta > 2$ ) haben.  $A$  sei die kleinste natürliche Zahl, die folgenden Kongruenzen genügt:

$$\begin{aligned} A &\equiv 0 \pmod{p_1^2 p_2^2 \dots p_r^2}, \\ A + b_i &\equiv 0 \pmod{p_{r+3i-2} p_{r+3i-1} p_{r+3i}} \quad (1 \leq i \leq s). \end{aligned} \quad (*)$$

Dieses Kongruenzensystem ist lösbar, da die Moduln teilerfremd sind.

Wir behaupten zunächst, dass alle Zahlen  $A + x$  ( $0 \leq x \leq p_r$ ) mindestens drei verschiedene Primfaktoren haben. Das ist klar, wenn  $x$  mehr als zwei verschiedene Primfaktoren hat, denn diese sind  $\leq p_r$  und gehen somit in  $A$  auf. Ist  $x = p_i p_j$  ( $1 \leq i < j \leq r$ ), so ist  $A + x$  durch  $p_i p_j$  teilbar und der Quotient ist weder durch  $p_i$  noch durch  $p_j$  teilbar, da  $A \equiv 0 \pmod{p_i^2 p_j^2}$ , also hat  $A + x$  mindestens drei verschiedene Primfaktoren. Wenn  $x$  weniger als drei verschiedene Primfaktoren hat und  $\neq p_i p_j$  ist, so ist  $x = b_v$  ( $1 \leq v \leq s$ ) und  $A + x$  ist durch die drei verschiedenen Primzahlen  $p_{r+3v-2}, p_{r+3v-1}, p_{r+3v}$  teilbar.

Ist  $a_t$  das grösste  $a_i \leq A$ , also  $a_t \leq A < a_{t+1}$ , so muss  $a_{t+1} > A + p_r$  gelten, weil ja alle  $A + x$  mit  $x \leq p_r$  mindestens drei verschiedene Primfaktoren enthalten. Somit ist  $a_{t+1} - a_t > p_r$ , und wir haben zu zeigen, dass es ein von  $r$  unabhängiges  $c > 0$  mit  $p_r > c \log t$  gibt. Zu diesem Zweck beweisen wir die Abschätzung

$$A < 4^{C_1} p_r,$$

aus der  $p_r > C_2 \log A \geq C_2 \log a_t > C_2 \log t$  folgt (die  $C_i$  sind positive, von  $r$  unabhängige Konstanten).

Zunächst schätzen wir  $s$  ab. Wir benützen folgenden Hilfssatz: Bedeutet  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen  $p \leq x$  und  $P(x)$  die Anzahl der Potenzen  $p^\alpha \leq x$ , so gilt  $P(x) < C_6 \pi(x)$ . Beweis: Offensichtlich ist

$$P(x) = \pi(x) + \pi(x^{1/2}) + \pi(x^{1/3}) + \dots + \pi(x^{1/n}),$$

wenn  $x^{1/n} \geq 2$ , aber  $x^{1/(n+1)} < 2$ . Also ist  $n \leq \log x / \log 2$ , und man hat wegen  $\pi(x) < C_3 x / \log x$

$$P(x) < \pi(x) + C_3 \frac{\log x}{\log 2} \cdot \frac{x^{1/2}}{\log x^{1/2}} < C_3 \frac{x}{\log x} \left\{ 1 + \frac{C_4 \log x}{x^{1/2}} \right\} < C_5 \frac{x}{\log x} < C_6 \pi(x).$$

Um nun die Anzahl der  $p^\alpha q^\beta \leq x$  ( $\alpha > 1$ ) abzuschätzen, teilen wir diese Produkte in zwei Klassen I und II. Zu I werden die Produkte mit  $p^\alpha < x^{1/2}$  gezählt. Für ihre Anzahl findet man nach dem Hilfssatz und wegen  $\log(x/p^\alpha) > (\log x)/2$  die Abschätzung

$$\sum_{\alpha > 1} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}\right) < \frac{2 C_6 x}{\log x} \sum_{\alpha > 1} \frac{1}{p^\alpha} < \frac{C_7 x}{\log x}.$$

Zur Klasse II gehören die Produkte mit  $p^\alpha \geq x^{1/2}$ . Ist  $\alpha$  gerade, so kann  $p^\alpha = k^2$  mit  $k \geq x^{1/4}$  gesetzt werden. Für  $\alpha = 2\mu + 1$  ( $\mu \geq 1$ ) hat man  $p^{2\mu} \geq x^{1/3}$ , denn aus  $p^{2\mu} < x^{1/3}$  würde  $p < x^{1/6\mu}$  und  $p^\alpha \leq x^{1/2}$  folgen. Die Anzahl der Produkte in II ist nun sicher kleiner als

$$\sum_{\alpha > 1} \frac{x}{p^\alpha} < x \sum_{k \geq x^{1/6}} \frac{1}{k^2} < C_8 x \int_{x^{1/6}}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = C_8 x^{5/6}.$$

Die Anzahl der Zahlen in I und II ist also kleiner als

$$\frac{C_7 x}{\log x} + C_8 x^{5/6} = \frac{x}{\log x} \left\{ C_7 + C_8 \frac{\log x}{x^{1/6}} \right\} < C_9 \pi(x).$$

Wegen  $\pi(p_r) = r$  folgt nun  $s < C_6 r + C_9 r = C_{10} r$ .

<sup>1)</sup> Vgl. E. TROST, *Primzahlen* (Birkhäuser Verlag, Basel 1953), Satz 28.

Für den letzten Schritt benutzen wir erstens die Tatsache, dass das aus allen Primzahlen  $p \leq x$  gebildete Produkt  $< 4^x$  ist<sup>2)</sup>. Zweitens folgt aus  $p_r < C_{11} r \log r$ <sup>3)</sup> die Abschätzung

$$p_r (1 + C_{12}) < C_{11} r (1 + C_{12}) \{ \log r + \log (1 + C_{12}) \} < C_{13} r \log r < C_{14} p_r.$$

$A$  ist als kleinste Lösung des Kongruenzsystems (\*) höchstens gleich dem Produkt der Moduln, also gilt

$$\begin{aligned} A &\leq p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2 p_{r+1} p_{r+2} \cdots p_{r+3s} < 4^{p_r} 4^{p_r+3s} \\ &< 4^{2p_r+3s} < 4^{2p_r} (1 + 3 C_{10}) < 4^{C_1 p_r}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht.

Wie der Aufgabensteller mitteilt, ist eine entsprechende Aussage für die Zahlen mit höchstens  $m > 2$  verschiedenen Primfaktoren nicht bekannt.

**Aufgabe 238.** Es ist nicht möglich, einen abgeschlossenen Kreisbereich in zwei kongruente und disjunkte Punktmengen zu zerlegen<sup>4)</sup>. Man kann sich hier fragen, ob die entsprechende Aussage für jede beschränkte zentralsymmetrische Punktmenge, die ihren Mittelpunkt enthält, richtig ist<sup>5)</sup>. Mit andern Worten: Existiert eine zentralsymmetrische beschränkte Punktmenge in der Ebene, die man in zwei kongruente und disjunkte Teilmengen zerlegen kann, obwohl der Mittelpunkt der Punktmenge angehört?

H. HADWIGER, Bern.

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es gibt solche Punktmengen! Wir beschreiben eine spezielle Lösung als Zahlenmenge in der komplexen Zahlenebene.

Die Menge  $C$  bestehe aus den beiden Teilmengen  $A$  und  $B$ , wobei  $A$  die Punkte  $z_n = 1 - a^n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) und  $B$  die Punkte  $z_{-n} = -1 + a^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) enthält und  $a = e^i$ ,  $i = \sqrt{-1}$  ist.  $A$  und  $B$  sind zwei disjunkte Punktmengen, welche auf den Einheitskreisen um 1 und  $-1$  liegen. Die angesetzten Zahlen sind alle voneinander verschieden, und die ihnen entsprechenden Punkte liegen auf den beiden Kreislinien gleichverteilt.

Man erkennt unmittelbar, dass  $C$  zentralsymmetrisch ist und dass der Mittelpunkt  $z_0 = 0$  zu  $C$  gehört.

Nun betrachte man die Abbildung  $f(z) = -1 + a(1 - z)$ , welche den Punkt  $z$  in den Bildpunkt  $f(z)$  überführt; wie man feststellt, gilt  $f(z_n) = z_{-(n+1)}$ , so dass also die Teilmenge  $A$  in die Bildmenge  $B$  übergeht.

Die Abbildung stellt aber eine Drehung um den Punkt  $w = (a - 1)/(a + 1)$  mit dem Drehwinkel  $\varphi = 1 + \pi$  im positiven Sinn dar. Demnach sind  $A$  und  $B$  kongruent.

Eine ähnliche Lösung sandte R. LAUFFER (Graz).

**Aufgabe 239.** Es sei  $S_n$  die symmetrische Gruppe von der Ordnung  $n!$  und

$$(S_n)^k = S_n \times S_n \times \cdots \times S_n$$

das direkte Produkt von  $k$  Exemplaren der  $S_n$ . Es ist zu zeigen, dass die Gruppe  $(S_n)^k$  von  $k$  Elementen erzeugt wird ( $k \geq 2$ ).

FRANZ WEVER, Mainz.

<sup>2)</sup> Vgl. E. TROST, *Primzahlen* (Birkhäuser Verlag, Basel 1953), Satz 30.

<sup>3)</sup> Vgl. E. TROST, *Primzahlen* (Birkhäuser Verlag, Basel 1953), Satz 34.

<sup>4)</sup> Vgl. Aufgabe Nr. 51 von B. L. VAN DER WAERDEN [El. Math. 4, 18 (1949)] und Lösungen von W. GYSIN, D. PUPPE u. a. [El. Math. 4, 140 (1949)].

<sup>5)</sup> Die Frage der Kreiszerlegung wird auch in der Antrittsvorlesung von J. DE GROOT, *Phantasie von Punkt zu Punkt* [Euclides, Groningen, 24, 243–253 (1949)], erörtert. J. C. H. GERRETSEN schrieb hierzu [Zbl. Math. 34, 104 (1950)]: «Das verwandte Problem für irgendeine Scheibe mit Mittelpunkt scheint ausserordentlich schwierig zu sein und ist bis jetzt noch nicht gelöst worden.»



*Lösung:* Wegen

$$S_n = \{(12), (23 \dots n)\} \text{ (} n \text{ gerade) bzw. } S_n = \{(12), (123 \dots n)\} \text{ (} n \text{ ungerade)}$$

wird die  $S_n$  offenbar aus zwei Elementen mit teilerfremden Ordnungen erzeugt.

Wir zeigen nun allgemein:

Ist  $\mathfrak{G}$  eine Gruppe mit zwei Erzeugenden, deren Ordnungen (endlich und) zueinander teilerfremd sind, so lässt sich das direkte Produkt

$$\mathfrak{G}^k = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \dots \times \mathfrak{G}_k$$

von  $k$  zu  $\mathfrak{G}$  isomorphen Gruppen aus  $k$  Elementen erzeugen ( $k \geq 2$ ).

Zum Beweis seien  $A, B$  Erzeugende für  $\mathfrak{G}$  und  $A_i, B_i$  die ihnen entsprechenden Elemente von  $\mathfrak{G}_i$ .  $A$  (und damit jedes  $A_i$ ) habe die Ordnung  $a$ ,  $B$  (und damit jedes  $B_i$ ) die Ordnung  $b$ , und es gelte  $(a, b) = 1$ . Dann ist  $a x + b y = 1$  bei passenden ganzen rationalen  $x, y$ . Beachtet man, dass  $\mathfrak{G}_i$  und  $\mathfrak{G}_j$  für  $i \neq j$  elementweise vertauschbar sind, so wird

$$A_i = (A_i B_j)^{b y}, \quad B_j = (A_i B_j)^{a x} \quad (i \neq j)^6).$$

Hiernach enthält die aus den  $k$  Elementen

$$A_1 B_2, A_2 B_3, \dots, A_{k-1} B_k, A_k B_1 \tag{1}$$

erzeugte Untergruppe von  $\mathfrak{G}^k$  alle Elemente  $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$  und damit ganz  $\mathfrak{G}^k$ . Also ist (1) ein Erzeugendensystem für  $\mathfrak{G}^k$ .

G. PAZDERSKI, Halle (Saale).

Eine ähnliche Lösung sandte A. BAGER (Hjørring, Dänemark). Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass man mit weniger als  $k$  Erzeugenden nicht auskommt.  $(S_n)^k$  enthält nämlich  $(A_n)^k$  ( $A_n$ =alternierende Gruppe) als Normalteiler, dessen zugehörige Faktorgruppe die Ordnung  $2^k$  hat und nur ambige Elemente enthält, also zur Erzeugung  $k$  Elemente benötigt.

**Aufgabe 240.** Jedes Linienelement  $(T, t)$  einer Hyperbel  $h$  bestimmt mit den beiden Asymptoten eine Parabel  $p$ . Lässt man  $T$  auf  $h$  wandern, so entsteht eine einparametrische Parabelschar. Der Brennpunkteort dieser Parabeln ist zu suchen.

R. BEREIS, Wien.

*Lösung:* Es sei  $O$  der Mittelpunkt der Hyperbel; die Tangente in  $T$  schneide die Asymptoten in  $A$  und  $B$ .  $OT$  ist ein Durchmesser der zu  $T$  gehörigen Parabel. Schneidet  $OT$  den Umkreis des Dreiecks  $OAB$  zum zweitenmal in  $F'$ , so ergibt sich der Brennpunkt  $F$  der Parabel als zweiter Endpunkt der zu  $AB$  parallelen Sehne durch  $F'$  (Satz von LAMBERT und Spiegelungseigenschaft!). Mit  $r$  als Umkreisradius,  $\varrho = \overline{OT}$ ,  $t = \overline{AT}$ ,  $\varphi = \sphericalangle OTA = \sphericalangle OF'F$  wird

$$\overline{OF} = 2 r \sin \varphi, \quad \varrho t \sin \varphi = \triangle OAB = \frac{\overline{OA} \overline{OB} 2 t}{4 r} = \frac{e^2 t}{2 r},$$

wo  $e$  die lineare Exzentrizität der Hyperbel ist. Hieraus folgt

$$\varrho \overline{OF} = e^2.$$

Trägt man  $\varrho$  auf  $OF$  von  $O$  aus ab als  $\overline{OT'}$ , so durchläuft  $T'$  dieselbe Hyperbel wie  $T$ , da  $\sphericalangle BOT = \sphericalangle FOA$  (Peripheriewinkel über gleichen Bogen).  $F$  beschreibt also die zur Hyperbel inverse Kurve in bezug auf den konzentrischen Kreis mit Radius  $e$  (hyperbolische Boothsche Lemniskate).

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht.

<sup>6)</sup> Die Elemente von  $\mathfrak{G}^k$  können in der Form  $(G_1, G_2, \dots, G_k)$  geschrieben werden, wo  $G_i$  in  $\mathfrak{G}_i$  liegt.  $G_i$  entspricht in  $\mathfrak{G}^k$  das Symbol  $(1, \dots, G_i, \dots, 1)$  mit  $G_i$  in der  $i$ -ten Komponente. Bei der Multiplikation von zwei Klammersymbolen werden die entsprechenden Komponenten multipliziert. (Red.)

**Aufgabe 241.** Man beweise mit rein algebraischen Mitteln

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{2n} \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{4n+1} = 2n(4n+1),$$

$$\text{b) } \prod_{k=1}^{2n} \cos \frac{k\pi}{4n+1} = 4^{-n}.$$

M. G. BEUMER, Enschede (Holland).

*Lösung:* Aus der Moivreschen Formel folgt durch Vergleich der Imaginärteile

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i+1} (\cos^2 x)^{n-i} (\cos^2 x - 1)^i. \quad (1)$$

Für  $x = k\pi/(2n+1)$  [ $k$  ganz,  $k \not\equiv 0 \pmod{2n+1}$ ] verschwindet die linke Seite von (1), also hat die algebraische Gleichung  $n$ -ten Grades

$$\sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{2i+1} y^{n-i} (y-1)^i = 0 \quad (2)$$

die  $n$  einfachen Wurzeln  $y_k = \cos^2 k\pi/(2n+1)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).  $y^n$  hat den Koeffizienten  $2^{2n}$ , und das absolute Glied ist  $(-1)^n$ . Also ist das Produkt der Wurzeln  $2^{-2n}$ , und man erhält

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$

Setzt man in (2)  $y = z^{-1}$ , so erhält man die Gleichung

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{2n+1}{2i+1} (z-1)^i = 0$$

mit den  $n$  einfachen Wurzeln  $z_k = \cos^{-2} k\pi/(2n+1)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Der Koeffizient von  $z^{n-1}$  ist

$$\sum_{k=1}^n \cos^{-2} \frac{k\pi}{2n+1} = n \binom{2n+1}{2n+1} + \binom{2n+1}{2n-1} = 2n(n+1).$$

Hieraus folgt wegen  $\cos^{-2} v = 1 + \operatorname{tg}^2 v$

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = n(2n+1).$$

Auf diese Weise lassen sich zahlreiche ähnliche Formeln ableiten.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFFER, Graz.

### Neue Aufgaben

275. Man kann aus einer Kreisscheibe nichtabzählbar viele Radien entfernen (unter Belassen der Scheibenmitte) und dann einen Teil des Restes der Scheibe einer einzigen Drehung unterziehen, um die Scheibe wieder voll zu haben.

L. LOCHER-ERNST.

276. If  $\{x\}$  denotes the integer closest to  $x$ , prove that

$$\sum_{k=1}^n \{\sqrt{k}\} = \frac{\{\sqrt{n}\} (3n + 1 - \{\sqrt{n}\}^2)}{3}.$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada), und  
J. LAMBEK, Montreal.

277. Schneidet man einen (reellen) Strahl eines Büschels  $P$  mit den Asymptoten  $a_1, a_2$  einer gegebenen Ellipse  $e$ , so erhält man zwei konjugiert komplexe Punkte  $A_1, A_2$  mit den Laguerreschen Vertretern  $L, R$ . (Die Laguerreschen Vertreter eines konjugiert komplexen Punktepaares  $A_1, A_2$  sind die reellen Schnittpunkte der durch  $A_1$  und  $A_2$  legbaren Minimalstrahlen.) Welche Kurven  $l$  und  $r$  erfüllen die Punkte  $L$  bzw.  $R$ , wenn  $g$  das Büschel  $P$  beschreibt?

Durchläuft  $P$  eine Kurve  $c$ , so erhält man zwei Kurvenscharen  $\{l\}$  und  $\{r\}$ . Für welche Kurven  $c$  besteht jede Schar für sich aus kongruenten Kurven? Was erhält man speziell für  $c = e$ ?

R. BEREIS und H. BRAUNER, Wien.

278. Man beweise

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{12}}} : \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt[4]{\frac{4}{27}}.$$

E. TROST, Zürich.

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Von einer Sorte Eier kosten 74 Stück ebensoviel Rappen mehr als Fr. 12.25, als man für Fr. 12.25 erhält. Wie teuer ist ein Ei? [17,5 Rp.]
2. Ein Landstreicher hat  $\frac{3}{8}$  einer schmalen Eisenbahnbrücke zurückgelegt, da hört er hinter sich einen Schnellzug mit 100 km/h herankommen. Er kann sich auf zwei Arten gerade noch retten: indem er zum einen oder zum anderen Ende der Brücke läuft. Welche Geschwindigkeit benötigt er? (Aus: The American Mathematical Monthly 1953.) [25 km/h.]
3. Ein Zug von  $A$  nach  $B$  kommt 20 Minuten zu früh in  $B$  an, wenn er mit 5 km/h mehr als der fahrplanmässigen Geschwindigkeit fährt; hingegen 25 Minuten zu spät, wenn seine Geschwindigkeit 5 km/h weniger als die fahrplanmässige beträgt. Welches ist die fahrplanmässige Geschwindigkeit? [45 km/h.]
4. Ein Radscha gibt ein Jugendfest. Es werden eine Anzahl Schmuckstücke und Edelsteine im Palast versteckt, die die Kinder suchen und behalten dürfen. Um die weniger glücklichen Finder zu entschädigen, ist zudem noch festgesetzt: Jedes Kind erhält 2 Rupien für jedes nicht gefundene Stück, abzüglich 5 Rupien für jedes gefundene. Am Schluss zeigt sich, dass jedes Kind mindestens ein Stück gefunden hat, aber keines dieselbe Anzahl. Die zwei, die am wenigsten Erfolg hatten, fanden zusammen vier Stück, und der Radscha hatte im ganzen 1957 Rupien auszuzahlen. Wie viele Geschenke brachte das erfolgreichste Kind heim? (Aus: The New Statesman and Nation 1935.) [14.]
5. Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Stumpf einer dreiseitigen Pyramide eine Umkugel besitzt?